教学简报

2021年　第23期

总第424期

鲁东大学教务处　　　　　　　　　　二〇二一年十一月二十六日

鲁东大学

课程思政教学典型案例专辑

（二十一）

教务处教学创新与研究科

目　录

《细胞生物学》课程思政元素分析与设置

生命科学学院 刘泽隆 曲明娟 牟萍 李清 王昌留

一、课程内容设置的依据

1.课程定位性质

《细胞生物学》和《细胞生物学与细胞工程》是生物科学（中外合作办学）、生物科学、生物工程、生物制药、葡萄与葡萄酒等专业的必修课程。本课程是在学生掌握动物学、植物学、无机化学、有机化学、生物化学、分子生物学等的基础上开设的专业核心课程。本课程的主要任务是让学生认识细胞、理解细胞，在细胞显微结构、超微结构和分子水平等不同水平上，认识细胞的组成、结构、功能，全面理解细胞细胞膜、细胞器、细胞质、细胞核和细胞骨架的结构、发生和作用，动态认识细胞增殖、分化、衰老、病变、死亡等过程，深刻了解信号传递、信号通路和调控机制，以辩证、联系、发展的科学观念和方法深入体会细胞的个体和群体，掌握细胞工程相关的基本原理、技术和方法，增强学生探索创新原理、技术和方法的信心。有了本课题的理论基础，学生才能更好地理解和学习细胞生物学专题讲座和解剖生理学的内容。

2.课程的教学目标

课程目标	课程目标内容	目标性质
课程目标 1	全面了解细胞生物学学科的发展历程，掌握该学科的研究内容、研究热点，理解其在现代生物学发展中的地位及作用；理解并掌握不同种类的细胞所共有的结构及功能特点；掌握细胞的主要结构组成（细胞膜、细胞器、细胞质、细胞骨架、细胞核）的形态特点、主要功能和发生更新机制；理解细胞是一个有序的整体，每一个组成部分结构和功能的异常都将影响细胞个体的生理功能；掌握细胞增殖、细胞分化、细胞衰老、细胞病变（癌变）及死亡等重要生命活动的细胞学特征及其分子调控机制；掌握细胞信号、信号通路和调控机理；掌握细胞工程主要的研究领域及研究热点，以联系、发展的科学观念和方法深入体会细胞的个体和群体，掌握细胞工程相关的基本原理、技术和方法，增强学生探索新原理、技术和方法的信心。了解细胞工程研究涉及的难点和热点，分析各种细胞工程技术的理论及实际应用价值。	知识目标
课程目标 2	通过学习掌握细胞生物学研究中常用的技术方法，根据不同的研究目的，选择合适的技术方法，进行实验设计和数据分析；能综合运用细胞生物学的相关知识解释生命的生理、病	能力目标

	理的现象。以科学原理、技术、方法，发现问题、分析问题、解决问题。	
课程目标 3	能深入体会细胞是有机体的基本单位，在生命代谢、发育、成熟增殖、遗传变异过程中发挥作用。各种类型的细胞以及各自独立的细胞，相互联系、协调、依赖和制约，以保证细胞整体的结构功能正常，是一个和谐统一的小社会，共同构成更大的社会群体，不同程度地存在于生态系统并影响着生态系统。能充分明白个体与整体、小我与大我的相互关系和意义。	素质目标

3.课程的专业特色

以细胞的形态结构为基础，从微观、超微观水平开始从内到外或从外到内，抽丝剥茧一样地逐渐揭开神秘的细胞膜、细胞质、细胞器、细胞骨架和细胞核的位置、大小、多少、组成、作用和联系，以动态、发展、变化地理念掌握细胞生命主要活动，充分讲解关键指标、关键信号、关键通路和关键机制。以科学原理、技术、方法，发现问题、分析问题、解决问题，增强学生对科学的追求，激发学生对生命的关切，加深学生对生态保护理念的认识。

二、课程内容设置的指导思想

以辩证、发展、动态、联系的哲学思想为指导，以科学原理、技术、方法为原则，以发现实践问题、分析实践问题、解决实践问题为导向，以细胞为核心，紧密结合生活、社会、生态等方面的重点、难点和热点，有机地将思政内容融合到《细胞生物学》课程的关键实例中。使学生更好地了解细胞、群体、社会和生态，将科学原理、技术、方法运用到实践中，尤其是关爱生命和保护生态中。

三、课程思政内容挖掘

《细胞生物学》课程思政教学设计表

教学章节	知识点	思政元素案例	培养目标
第一章 绪论	1、细胞生物学的重要性； 2、细胞生物学的发展史	我国细胞生物学的重点研究领域	了解细胞生物学的重点、难点和热点，激发学生对科学问题的探索精神
第二章 细胞的基本知识	1、原核细胞与古核细胞； 2、真核细胞	汤飞凡分离衣原体	增强民族自豪感，激发学生对科学问题的探索精神
第三章 细胞生物学研	1、细胞研究技术；	大熊猫；金丝猴；娃	激发学生对科学问题

究技术	2、模式物种与功能基因组的研究。	娃鱼（东方大鲵）	的探索精神，加深学生对生态保护理念的认识。
第四章 细胞质膜	质膜的组成、结构和功能	分子是不断运动的，生命离不开运动	激发学生对科学问题的探索精神，加深学生对分子运动和生命运动的认识，增强对生命的关切。
第五章 细胞质基质	细胞质基质的涵义、化学组成和功能	水是生命之源，细胞基质中一些离子、分子以不同程度溶解于水中	加深学生对水、溶质、溶液的认识，增强学生对资源节约、利用的理念
第六章 内膜系统	内质网、高尔基体、核糖体、溶酶体与过氧化物酶体等细胞器的组成、结构和功能	细胞是有序的结构，细胞器是特化的结构，各部分之间相互紧密联系，犹如一条生产线	激发学生对科学问题的探索精神，加深学生对纪律、规范的认识
第七章 线粒体与叶绿体	线粒体和叶绿体的组成、结构和功能	线粒体是生物能的能量工厂，叶绿体是固定太阳能和生产有机质的能量工厂	激发学生对科学问题的探索精神，加深学生能量生产利用的认识，加深学生对植树造林必要性的认识
第八章 细胞骨架	微管、微丝和中间丝的形态、组成、结构和功能	微管犹如运输轨道，装配的二联体微管对低温敏感，2008 年大雪对我国南方的影响	激发学生对科学问题的探索精神，加深学生对我国地域广大的认识，对自然、社会和生命的关切。
第九章 细胞核	1、细胞核的形态、组成、结构和功能； 2、染色质与染色体的形态、组成、结构和功能； 3、核仁与核基质形态、组成、结构和功能。	细胞核是细胞的核心和关键，其中的遗传物质 DNA 组成染色质和染色体，染色质和染色体上的基因发挥重要作用	激发学生对科学问题的探索精神，加强学生对核心的认识，加深学生对党中央的核心领导作用的认识
第十章 细胞外基质与细胞连接	细胞外基质与细胞连接的形态、组成、结构和功能	多细胞生物的细胞不是孤立存在的，细胞与细胞之间是相互联系的，细胞内和细胞外是紧密联系的，犹	激发学生对科学问题的探索精神，加强学生对个体、集体和社会的认识。

		如一个小社会	
第十一章 细胞通讯	细胞通讯的类型、组成、结构和功能	即使是单细胞生物，细胞与细胞外环境之间是相互联系的，犹如一个小生态环境	激发学生对科学问题的探索精神，加强学生对部分与整体，以及个体、集体和社会的认识。
第十二章 细胞的增殖、调控与癌细胞	细胞增殖调控中关键分子、关键信号、关键通路； 癌细胞的特点、关键分子、关键信号、关键通路。	细胞调控有严格的时间顺序，不能混乱，否则将导致重大问题。这正如社会要稳定而且要发展一样。	激发学生对科学问题的探索精神，加强学生对时间、规则、规范和规律的认识。
第十三章 细胞分化	细胞分化的概念、本质、特点及影响因素；干细胞；胚胎诱导；同源异形基因；真核生物基因表达调控机制。	细胞调控有严格的时间和空间顺序，不能混乱，否则将导致重大问题，这正如社会要稳定而且要发展一样。	激发学生对科学问题的探索精神，加强学生对时间、空间、规则、规范和规律的认识。
第十四章 细胞的衰老与死亡	细胞衰老、细胞凋亡、细胞坏死的特点、关键分子、关键信号、关键通路。	细胞的发展变化有规律，尤其要关注关键关键分子、关键信号、关键通路，充分认识细胞的规律和生命的变化规律，关切生命。	激发学生对科学问题的探索精神，加强学生对细胞、生命和生态的认识。
第十五章 细胞工程热点技术	动物细胞工程重点、难点和热点技术	重点技术是基础，热点技术是方向，难点技术是关键。	激发学生对科学问题的探索精神，加强学生对细胞、生命、生态和实践问题的认识。

四、教学反思及改进措施

20 多年来，我们坚持以学生为中心，以实践问题为导向，不断探索和实践将思政内容融合到《细胞生物学》课程的关键实例中，可以肯定的是，课程思政在教学过程中是非常必要的，也是行之有效的，但也发现有一部分学生对课程思政融入专业课程有不同的想法，尤其对具体的方式方法、时间控制等方面。

为此，我们借鉴国内各方面专家的研究成果和教学实践，持续改进课程思政关键元素融入《细胞生物学》、《细胞生物学与细胞工程》、《细胞生物学实验》和《《细胞生物

学》与细胞工程实验》中。

在具体实施过程中，除传统讲授、谈话等方式方法，借鉴近几年来的新媒体、融媒体和互联网发展技术，充分利用 QQ、微信等社交工具，以动画、视频、短视频、PPT 等形式，向学生发送与专业相关的关键内容，同时也发送与规范、规则、纪律、法律等相关的关键内容。通过网络问卷调查发现，新媒体、融媒体和互联网发展技术发送的关键内容得到广大学生的认可。，同时也发现也有一部分学生对这些方式方法也有异议，有的认为不够多，但有的认为太多了。

总之，课程思政融入专业课程是一个持续性的大课题，仍然需要广大教师进一步研究、实践和改进。

融入思政元素的《二元一次不定方程》教学设计

数学与统计科学学院 李飞

导语：2020 年 6 月，教育部印发了《高等学校课程思政建设指导纲要》，全面推进高校课程思政建设。如何提升教师开展课程思政建设的能力，并有效地建设课程思政，切实提升立德树人的成效，成为高校教师关注的焦点。因此，如何结合专业特点，更好地挖掘思政元素，将专业知识与课程思政有机融合，是专业教师需要在教学过程中不断实践和探索的问题。

本案例以“二元一次不定方程”为授课对象介绍思政元素融入初等数论课堂的具体授课场景，从学科历史、数论名家、数学精神、科技创新等诸多方面挖掘丰富的思政元素，在传授专业知识的同时实现对学生世界观、人生观和价值观的引领。

教学内容	二元一次不定方程	**所属课程**	初等数论
授课对象	数学与应用数学本科生	**授课时长**	2 课时
教学背景	数论在数学中的地位是独特的，高斯曾经说过“数学是科学的皇后，数论是数学中的皇冠”。因此，数学家都喜欢把数论中一些悬而未决的困难问题，叫做“皇冠上的明珠”，以鼓励人们去“摘取”，如哥德巴赫猜想，孪生素数问题，完全数问题等。 初等数论是研究整数的性质和不定方程（组）的整数解的一门学科，它的应用非常广泛，现实生活和生产实践中的许多问题的变量都是整数，有些问题归结为求不定方程的整数解，有些问题归结为求一些方程或不等式的整数解等等。特别是 20 世纪后期计算机科学和通信技术的飞速发展，数论已经成为密码学的重要工具之一。 不定方程是初等数论最古老的一个分支，我国古代数学家对不定方程进行了大量的研究。公元前 1100 多年，我国古代数学家商高就提出来“勾广三、股修四、径隅五”的著名论断。大约 1500 年以前，我国古代的另一位数学家张丘建在他编写的《张丘建算经》里提出并求解了“百钱买百鸡”问题。从历史来看，求解不定方程是推进数论发展的最重要的课题，对初等数论做出了重大贡献。		
	知识目标： （1）了解二元一次不定方程的形式，掌握二元一次不定方程有整数		

教学目标	解的条件； **（2）**掌握利用辗转相除法求二元一次不定方程整数解的方法； **（3）**能熟练求二元一次不定方程的特解、正整数解和一切整数解。 **能力目标：** **（1）**培养学生的抽象思维能力，逻辑推理能力和数学运算能力。 **（2）**培养学生运用数学语言描述数学问题的能力，理解数学语言具有准确、严谨、简洁、规范特点。 **（3）**培养学生分析问题、解决问题及实际应用能力。 **德育目标：** **（1）**体会“数学是一种精神，一种理性的精神”。理性精神的实质是追求真理，实事求是，独立思考，积极反思，勇于怀疑和批判，不断创新，坚信科学能引领人类实现自我超越和发展。理性精神就是一种信念，表现为对真理的追求。毛泽东同志说过的一句话：“人是要有点精神的”，这里所讲的精神指的是一种信念，一种境界，与数学的理性精神在一定意义上是具有同理性的。结合“中国共产党人前赴后继，为了心中共同的理念”的百年奋斗史，引导学生树立正确的价值追求。 **（2）**体会数学家们坚持不懈，勇于探索，求真创新，不畏艰辛的美好品质。华罗庚说：“不怕困难，刻苦学习，是我学好数学最主要的经验。”在科学的道路上没有平坦的大道可走，只有一条弯曲的小径。只有不畏劳苦攀登的人，才有可能登上科学的高峰。数学家陈景润不畏艰难困苦、顽强攻关、得出迄今为止关于数论难题“哥德巴赫猜想”的最好研究成果。激励学生勤奋学习，不怕困难，志存高远，脚踏实地，增强社会责任感。 **（3）**激发学生的民族自豪感、树立文化自信。我国古代有《张丘建算经》、《算经十书》等数学名著，近代出现了华罗庚、陈景润、闵嗣鹤等第一流的数论学家。在筛法和哥德巴赫猜想方面的研究，我国数学家取得世界领先的水平。特别是陈景润在 1966 年证明的“哥德巴赫猜想”，是筛法的光辉顶点。作为新时代的大学生，应该了解前辈的奋斗历史，开展中华优秀传统文化学习，坚定文化自信，确定自己的奋斗目标，心中有明灯，前行的路更亮。 **（4）**认识辗转相除法在数学中的基础地位，让学生体会这一工具从古希腊的《几何原本》到现今的网络空间安全理论基础等一直保持重要的应用价值，让学生体会科学服务实践的特征，指出网络空间安全离不开数学，培养学生学习数学的国家使命感。 **（5）**通过不定方程研究历史中的名题（如勾股定理等）、名人（如高斯、欧拉）、名事（费马大定理的的解决），让学生体会数学的魅力

	以及知识形成发展的哲学原理。 （6）培养学生逻辑抽象能力和严谨的学习态度。体会数学概念、定理的简洁性和准确性，蕴含着“大道至简”的哲学思想。
重难点分析	**重点：**二元一次不定方程有解的充要条件，一切解的表达式及求法。 **难点：**二元一次不定方程一切解的表达式及推导过程。
教学手段与方法	**教学手段：**黑板为主，多媒体展示为辅。 **教学方法：**启发式，探究式和讲练结合式。

教学过程：(包括授课思路、过程设计、讲解要点及各部分具体内容、时间分配等)

一、引入

1、介绍大数学家欧几里得事迹；介绍不定方程又名为丢番图方程的原因，介绍丢番图墓碑的故事；介绍不定方程研究历史中的名题，名人和名事。

【思政元素】介绍号称数学圣经的《几何原本》的作者欧几里得的事迹，让学生感受数学家不畏艰难、完成数学巨著的科学精神；介绍不定方程之所以称为丢番图方程的原因，介绍丢番图墓碑的故事，让学生领会数学家的幽默豁达；介绍不定方程研究历史中的名题（如勾股定理等）、名人（如高斯、欧拉）、名事（费马大定理的解决），让学生体会勇于探索的科学家精神以及知识形成发展的哲学原理。通过介绍，激发学生对不定方程的关注和兴趣，培养学生的求知欲。

2、中国古代数学中著名的“百钱买百鸡问题”：“鸡翁一，值钱五，鸡母一，值钱三，鸡雏三，值钱一。百钱买百鸡，问鸡翁母雏各几何？”

【思考】“百钱买百鸡问题”最终归结为求 $7x+4y=100$ 的整数解问题。其中蕴含的初等数论的知识是什么？

【思政元素】由生活问题建立二元一次方程模型，让学生体会数学知识来源于生活，并应用于生活的辩证思想。通过介绍《张丘建算经》、《算术书》、《孙子算经》等相关古典数学名著，让学生感受中国传统数学文化魅力，激发学生的民族自豪感、树立文化自信。

二、探究新知

1、二元一次不定方程的定义

定义 形如 $ax+by=c$ 的方程称为二元一次不定方程，其中

$$a\neq 0,b\neq 0,\ \ a,b,c\in \mathrm{Z},$$

求方程 $ax+by=c$ 的整数解的问题叫做解二元一次不定方程。

【思政元素】 **让学生体会，要想学习一般的不定方程，需要从最基本的二元一次不定方程开始，学习知识要循序渐进、由简入难，同时也要通过高次方程存在很多难题未能解决的现实认识到科学问题，即便是看似简单的科学问题，其解决也可能存在很多难以预知的困难，从而培养学生敬畏科学的态度。**

2、二元一次不定方程有整数解的条件

【思考】二元一次不定方程一定存在整数解吗？给出两个简单的例子，学生通过观察，可知答案是不一定的。在此基础上，向学生提出本节课所要解决的两个核心问题：

问题 1：二元一次不定方程在什么情况下，有整数解？

问题 2：如果不定方程有解，如何求出其整数解？

【分析】让学生观察、分析二元一次不定方程的一般形式，启发引导学生利用整除和最大公因数的性质探究二元一次不定方程有解的必要条件，然后，让学生讨论该必要条件是否为此方程有解的充要条件，并引导学生加以验证。

定理 1 不定方程 $ax+by=c$ 有整数解的充要条件是 $d\mid c$，$d=(a,b)$ 。

证明 必要性：

若 $ax+by=c$ 有整数解 $x=x_0,y=y_0$ ，则 $ax_0+by_0=c$，

$\because d=(a,b)\ \therefore d\mid a,d\mid b$，

$\Rightarrow d\mid ax_0$，$d\mid by_0\Rightarrow d\mid ax_0+by_0$，

即 $d\mid c$ 。

充分性：

$\because d\mid c$，$\therefore$ 令 $c=dc_1$，

又 $\because d=(a,b)\quad \therefore d\mid a,d\mid b\Rightarrow a=da_1,b=db_1,(a_1,b_1)=1$，

$\Rightarrow ax+by=c$ 通解于 $a_1x+b_1y=c_1,(a_1,b_1)=1$，

对于 a_1,b_1，$\exists x_0',y_0'\in Z$，使得 $a_1x_0'+b_1y_0'=1$，

两边同乘 c_1d，

有 $a_1x_0'c_1d+b_1y_0'c_1d=c_1d\Rightarrow ax_0'c_1+by_0'c_1=c$，

$x_0=x_0'c_1$，$y_0=y_0'c_1$，有 $ax_0+by_0=c$。

$\therefore$ 原不定方程 $ax+by=c$ 有整数解 $x=x_0$，$y=y_0$。

【思政元素】培养学生的自主探究能力和知识迁移能力，使学生掌握从已知到未知探求解决问题的办法，让学生体会到数学中探索与发现的乐趣，培养科学探究精神。

3、二元一次不定方程的求解公式

问题 3：通过例子使学生明白，如果二元一次不定方程有解的话，那么一定有无穷多个解。如何求出它的一切整数解呢？

【分析】让学生回顾《高等代数》中非齐次线性方程组通解的结构，以及《常微分方程》中常系数非齐次线性微分方程的通解的结构。引导学生用类比的方法猜测，二元一次不定方程在有解的情况下，一切解的结构为 $ax+by=0$ 通解+原方程的特解。进一步，启发学生利用整除的性质，探究 $ax+by=0$ 的通解。

定理 2 若二元一次不定方程有解并且 $x=x_0$，$y=y_0$ 是它的一个解，则它的一切解可以表示成

$$\begin{cases} x=x_0-\dfrac{b}{d}t \\ y=y_0+\dfrac{a}{d}t \end{cases}（t=0,\pm1,\pm2,\cdots）。$$

证明 设 (x,y) 是 $ax+by=c$ 的任一解，则 $ax+by=c$。

$\because (x_0,y_0)$ 是 $ax+by=c$ 的一个解，$\therefore a_0x+b_0y=c$，

$\therefore a(x-x_0)+b(y-y_0)=0\Rightarrow -a(x-x_0)=b(y-y_0)$。

$\therefore a=a_1d$，$b=b_1d$，$d=(a,b)$，$(a_1,b_1)=1$，

$\therefore -a_1(x-x_0)=b_1(y-y_0)\Rightarrow a_1|b_1(y-y_0)$。

$\because (a_1,b_1)=1$，$\therefore a_1|y-y_0$，

$\therefore \exists t\in Z$，使得 $y-y_0=a_1t\Rightarrow y=y_0+a_1t$。

同理由 $b_1|x-x_0$ 可得 $\exists t'\in Z$，使得 $x-x_0=-b_1t'$，

$\therefore x=x_0-b_1t'$。

又 $\because -a_1(x-x_0)=b_1(y-y_0)$，

$\therefore a_1b_1t'=a_1b_1\mathrm{t}$，$\therefore t=t'$，

$$\therefore \begin{cases} x=x_0-b_1t \\ y=y_0+a_1t \end{cases}，\text{即} \begin{cases} x=x_0-\dfrac{b}{d}t \\ y=y_0+\dfrac{a}{d}t \end{cases}，\mathrm{t}\in Z（*）。$$

也就是说 $ax+by=c$ 的任一解 (x,y) 一定可表为（*）形式，

反之，在（*）中任取一整数 t 代入

$$ax+by=a(x_0-\frac{b}{d}t)+b(y_0+\frac{a}{d}t)=ax_0+by_0=c，$$

$$\therefore \exists t\in Z，\begin{cases} x=x_0-\dfrac{b}{d}t \\ y=y_0+\dfrac{a}{d}t \end{cases}$$ 都是 $ax+by=c$ 的解。命题得证。

【思政元素】培养学生逻辑推理能力和严谨的学习态度，感受数学知识形成发展的哲学原理，体会数学定理的简洁性和准确性，蕴含着“大道至简”的思想。激励学生勇于探索，求真创新，不畏艰辛的美好品质。数学的理性精神就是一种信念，表现为对真理的追求，正如中国共产党人前赴后继，为了心中共同的理念的百年奋斗史，引导学生树立正确的人生观和价值观。

4、二元一次不定方程特解的求法

问题 4：如何找出求二元一次不定方程特殊解的方法？

【思考】其中蕴含的初等数论知识和工具是什么？

（1）观察法

当二元一次不定方程的系数不大时，可用观察法求得它的一个解，从而得到通解。

（2）辗转相除法

观察定理 1 的证明过程易发现，我们是先证明方程 $ax+by=(a,b)$ 有解。

因此要找出求解的方法，应该就从此方程着手。

首先，上面的方程等价于 $\dfrac{a}{(a,b)}x+\dfrac{b}{(a,b)}y=1$ ，

所以，只要讨论如何求出形式如 $ax+by=1,(a,b)=1$（**）的方程的一个整数解即可。

易知道，由(**) 的一个特殊解，可以得出方程 $|a|x+|b|y=1$ 的一个特殊解，反之亦然。

于是，假定 $a>0,b>0$。为了求出满足上面条件的 x,y ，运用展转相除法，有

$$
\begin{aligned}
&a=bq_1+r_1，0<r_1<b，\\
&b=r_1q_2+r_2，0<r_2<r_1，\\
&\quad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\
&r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n，0<r_n<r_{n-1}，\\
&r_{n-1}=r_nq_{n+1}+r_{n+1}，r_{n+1}=0\text{。}
\end{aligned}
$$

由于 $(a,b)=1$ ，所以 $r_n=1$ 。因此，只需将上面的运算过程逆转，就能求出所要求的 x,y 。

【思政元素】辗转相除法又称欧几里得算法，直到今天，仍然有许多重要应用，如支撑网络空间安全的密码学。一是，通过几何之父欧几里得事迹，学习他努力拼搏、追求卓越、志向远大的科学精神；二是，通过欧几里得算法本身让学生体会数学中某些基础性定理的至简至美，培养学生数学审美情趣；三是，介绍习近平总书记提出的“整体国家安全观”，指出其所包含的网络空间安全离不开数学，培养学生学习数学的国家使命感。

三、应用新知

例 1 求 $7x+4y=100$ 的一切整数解。

解 易知不定方程有解，先解得 $7x+4y=1$ 的一组解为 $x=-1,y=2$，

因此方程 $7x+4y=100$ 的一组特殊解是 $x=(-1)\times100=-100,y=2\times100=200$。

由定理 1，方程 $7x+4y=100$ 的一切解的形式为 $x=-100+4t,y=200-7t,t\in Z$。

【思政要素】通过解决中国古代的百钱买百鸡问题，使学生认识数学与人类社会的密切联系及对人类历史发展的作用。让学生感受中国丰富的传统数学文化遗产，激发学生的民族自豪感、树立文化自信。认识数学知识来源于生活，又应用生活的辩证思想。

例 2 求方程$111x-321y=75$的一切整数解。

解 Q $(111,-321)=3,\ \ 3|75$，故有解，且原方程同解于$37x-107y=25$，

先解$37x-107y=1$，

Q $(37,107)=1$ $\therefore$ 存在 x_0',y_0' 使得$37x_0'+107y_0'=1$。

Q $107=37\times2+33$

$$37=33\times1+4$$
$$33=4\times8+1$$
$$4=1\times4$$

$$\therefore 1=33-4\times8=33-(37-33\times1)\times8$$
$$=33\times9-37\times8$$
$$=(107-37\times2)\times9-37\times8$$
$$=107\times9-37\times26$$
$$=37\times(-26)-107\times(-9).$$

$\therefore x_0'=-26, y_0'=-9$，

$\therefore$ 原方程的一个特解为：$x_0=-26\times25, y_0=-9\times25$。

故$37x-107y=25$的一切解可以表成：

$x=-26\times25+107t, y=-9\times25+37t$，$t\in Z$，

或$x=-8+107t, y=-3+37t$，$t\in Z$。

【思政要素】通过解决例题，让学生深刻体会辗转相除法这一基础定理的至简至美，加强学生科学思维训练，培养学生的运算能力和解决问题的能力。

【教学总结】通过本节课的学习，学生了解二元一次不定方程的形式，掌握二元一次不定方程有整数解的条件；掌握利用辗转相除法求二元一次不定方程整数解的方法；能熟练求二元一次不定方程的特解、正整数解和一切整数解。在概念及定理的教学中，注重知识形成发展的过程，适时插入思政元素，在传授专业知识的同时实现对学生世界观、人生观和价值观的引领，激发学生科技报国的家国情怀和使命担当，增强社会责任感。“数学是打开科学大门的钥匙”，大学生要脚踏实地，夯实基础数学根基，为实现中国梦贡献自己的力量。

思考题、讨论题、作业
有三个容积分别为 3 升，7 升和 10 升的容器（没有刻度），现在规定只用这三个容器，将 10 升液体等分成两半。问如何操作？怎样操作步骤最少？若将 3 升，7 升改为 4 升，6 能将 10 升液体等分吗? 【思政要素】 培养学生运用数学建模思想解决实际问题能力，提高学生的数学应用意识。新一代信息技术 5G、大数据、人工智能和区块链等，这些支柱产业的底层都是数学知识，国家需求驱动应用数学的发展。培养学生学习数学的国家使命感，增强社会责任感。
教学后记

融入课程思政的《全同粒子体系的量子态的描述》教学设计

物理与光电工程学院 程小萌 王德华

<table>
<tr><td>教学内容</td><td>全同粒子体系的量子态的描述</td><td>所属课程</td><td>高等量子力学</td></tr>
<tr><td>授课对象</td><td>物理与光电工程学院研究生</td><td>授课时间</td><td>50 分钟</td></tr>
<tr><td>教学背景</td><td colspan="3">学生已经学习过初等量子力学，对于全同粒子的性质有了一定的初步认识；
学生已经知道 Bose 子和 Fermi 子，对两者的性质有了一定的初步了解；
对于全通粒子体系中的粒子进行编号是毫无意义的，需要采用一个新的表象，即粒子数表象，这样才有利于对全通粒子体系的量子态进行研究。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="3">知识与目标：
（1）了解全通粒子的属性和全同性原理；
（2）知道全同粒子的内禀固有属性都相同，它们之间完全不可区分，对粒子就不能进行编号,这和经典力学不同。
（3）学会在粒子数表象下描述体系的量子态：即用处于某一个量子态的粒子的数目来描写体系的状态，而不是用它的坐标，动量等来描述。
（4）学会表示 Fermi 子和 Bose 子的产生和湮没算符的全部代数性质。
过程与方法：
（1）通过回顾之前所学知识，培养学生系统的知识体系；
（2）通过进行推导、计算，让学生掌握粒子数表象中体系量子态的描述；
（3）通过公式推导，让学生学会并理解 Fermi 子和 Bose 子的产生和湮没算符的全部代数性质。
情感态度与价值观：
（1）培养学生的严谨推理与科学探究能力；
（2）培养学生对于量子力学的热爱，感受量子力学的奇妙；
（3）培养学生正确的价值观；
（4）培养学生对量子世界的好奇心和求知欲。</td></tr>
</table>

重难点分析	**重点和难点：** 利用粒子数表象描述全同 Bose 子体系和全同 Fermi 子体系的量子态；表示 Fermi 子和 Bose 子的产生和湮没算符的代数性质。
教学手段	采用课堂讲授、小组合作讨论、例题讲解、公式辅助性推导等多种授课形式相结合的教学新模式。
思政理念	习近平总书记在全国高校思想政治工作会议上强调，要坚持把立德树人作为中心环节。要把思想政治工作贯穿教育教学全过程，实现全程育人、全方位育人，要用好课堂教学渠道，各类课程都要与思想政治理论课同向同行，形成协同效应。在此背景下，如何在专业课程的教学中将课程思政元素融入课堂、如何育人成为当前各个高校和教师们关注的热点。 2020年10月16日，习近平总书记在中央政治局就量子科技研究和应用前景第二十四次集体学习时强调：“量子力学是人类探究微观世界的重大成果。量子科技发展具有重大科学意义和战略价值，是一项对传统技术体系产生冲击、进行重构的重大颠覆性技术创新，将引领新一轮科技革命和产业变革方向。”“要充分认识推动量子科技发展的重要性和紧迫性，加强量子科技发展战略谋划和系统布局，把握大趋势，下好先手棋。” 量子力学带来了丰富的技术和应用，深刻地改变了人类的文明和历史。从光到基本粒子，到原子核，到原子、分子以及大量原子构成的凝聚态物质，量子力学对于认识这些都起了重要的作用，也因此成为现代技术的基础。量子力学被广泛地应用到化学、电子学、计算机科学、天体物理学等其他学科。量子力学课程的学习对培养学生严谨的科学学风、科学方法及抽象逻辑思维能力、创新精神等起到了十分重要的作用。 因此，充分发掘和运用量子力学中蕴含的思政教育资源，强化思想理论教育和价值引领，在量子力学课程的教学中融入课程思政元素，对于塑造学生的马克思主义世界观、人生观和价值观具有重要的理论和现实意义。已有研究者通过对量子力学的知识结构的再梳理，以及对量子力学课程中所蕴含的思政元素的深入挖掘，形成思政案例，探索了量子力学课程与思政元素相融合的问题，这些工作对量子力学课程思政教育理念的推广起到了很好的促进作用。然而，在探索和实践地方本科高校量子力学课程思政教育的过程中，量子力学课程与

	思政元素的有机结合仍然有很多困难和问题，需要去探索和解决。

教学过程

	内容	时间
1.引入	通过生活中对于双胞胎、两个相似的事物进行展示等，比较得出，肉眼可见一些物体具有完全相同的性质，引出思考：在量子力学里，是否也存在这样的相似？ 教师引导学生进行思考并回答。	2 分钟
2.复习回顾	教师带领学生回顾之前在量子力学中所学知识点，给学生指出：自然界中存在各种不同种类的粒子，例如，电子、质子、中子、光子，π 介子等。同一类的粒子具有完全相同的内禀的客观属性，例如，静质量、电荷，自旋、磁矩、寿命等。 事实上人们正是根据这些有相对稳定性的客观属性来划分各种不同种类的粒子。人们把属于同一类的粒子成为全同粒子。 但应当强调，粒子的全同性概念与粒子态的量子化有本质的联系。在经典物理学中，由于粒子的质量和状态（例如，质量、形状、大小）可以连续变化，谈不上两个粒子全同。两个粒子或两个物体的性质尽管可以任意地接近，但完全相同的概率是无限小的。 在量子力学中，由于态的量子化，两个量子态就要完全相同，要就很不明显，没有连续的过渡。两个粒子，例如，两个银原子，不管他们经过什么工艺过程制备出来，通常条件下都处于基态，用相同的波函数（量子态）来描述，所以我们说它们是全同的。 【目的：通过对前面所学知识点的回顾，可以有效地将知识进行前后整合，有利于学生进行新知识点的学习】	10 分钟
3.新课讲授	**5.1.1 粒子数表象** 对于全同粒子组成的体系，由于粒子的全同性（不可分辨性），任何两个粒子的置换并不导致一个新的量子态。通过归纳分析可以得出下式：	30 分钟左右

$N=2$

$$\psi^A_{\alpha\beta}(q_1,q_2)=\frac{1}{\sqrt{2!}}\left\{\varphi_\alpha(q_1)\varphi_\beta(q_2)-\varphi_\alpha(q_2)\varphi_\beta(q_1)\right\}=\frac{1}{\sqrt{2!}}\begin{vmatrix}\varphi_\alpha(q_1) & \varphi_\alpha(q_2)\\ \varphi_\beta(q_1) & \varphi_\beta(q_2)\end{vmatrix}$$

$N=3$

$$\psi^A_{\alpha\beta\gamma}(q_1,q_2,q_3)=\frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{Bmatrix}\varphi_\alpha(q_1)\varphi_\beta(q_2)\varphi_\gamma(q_3)+\varphi_\alpha(q_2)\varphi_\beta(q_3)\varphi_\gamma(q_1)\\ +\varphi_\alpha(q_3)\varphi_\beta(q_1)\varphi_\gamma(q_2)-\varphi_\alpha(q_3)\varphi_\beta(q_2)\varphi_\gamma(q_1)\\ -\varphi_\alpha(q_2)\varphi_\beta(q_1)\varphi_\gamma(q_3)-\varphi_\alpha(q_1)\varphi_\beta(q_3)\varphi_\gamma(q_2)\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3!}}\begin{vmatrix}\varphi_\alpha(q_1) & \varphi_\alpha(q_2) & \varphi_\alpha(q_3)\\ \varphi_\beta(q_1) & \varphi_\beta(q_2) & \varphi_\beta(q_3)\\ \varphi_\gamma(q_1) & \varphi_\gamma(q_2) & \varphi_\gamma(q_3)\end{vmatrix}$$

$\vdots$

N个

$$\psi^A_{\alpha\beta\gamma\cdots}(q_1,\cdots,q_N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix}\varphi_\alpha(q_1) & \cdots & \varphi_\alpha(q_N)\\ \varphi_\beta(q_1) & \cdots & \varphi_\beta(q_N)\\ \varphi_\gamma(q_1) & \cdots & \varphi_\gamma(q_N)\\ \vdots & \cdots & \vdots\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{N!}}\sum_P\delta_P P\left[\varphi_\alpha(q_1)\varphi_\beta(q_2)\varphi_\gamma(q_3)\cdots\right]$$

$\delta_p=\pm1$.(行列式的性质)

费米子：一对一：$\left|n_\alpha=1,n_\beta=1,n_\gamma=1,\cdots\right\rangle\Rightarrow\left|1_\alpha,1_\beta,1_\gamma,\cdots\right\rangle$或$\left|\alpha,\ \beta,\ \gamma,\cdots\right\rangle$

玻色子：一对多：$\left|n_1,n_2,n_3,\cdots\right\rangle$

（1）

上式表示在q表象中，N个全同Fermi子的归一化的量子态表示。其中，单粒子态（假设已归一）$\varphi_\alpha,\varphi_\beta,\varphi_\gamma,\cdots$上分别有一个粒子，$P$表示粒子之间的某种置换，$\delta_P(=\pm1)$是置换$P$的奇偶性。由上式可以看出，处于每个单粒子态上的全同Fermi子的数目不能超过1（Pauli原理）。

这种对称性对全同粒子系的量子态给予了很强的限制，即对于全同粒子系，在自然界中能实现的量子态，只可能是具有一定置换对称性的量子态。它们或者是对于任何两个粒子交换不变的对称态，或者是对任何两个粒子置换改变正负号的反对称态。对于前者，粒子系的统计性质遵守Bose统计，故称为Bose子。对于后者，则遵守Fermi统计，故称为Fermi子。所有实验都表明，统计性与粒子的自旋值密切相关，即Bose子的自旋（单位ħ）为整数（包括0），而Fermi子的自旋为半奇数。

对于全同Bose子体系，他们的波函数对于任何两个粒子的交换应该是对称的，因此，处于一个单粒子态上的Bose子的数目没有什么限制。设在单粒子态φ_{k_1}、φ_{k_2}、$\cdots$、φ_{k_N}上分别有n_1、n_2、$\cdots$、n_N个粒子（$\sum_i n_i=N$，n_i中有的可以为0，有的可以大于1），则归一化的交换对称波函数可表示为：（公式2）

$$\psi^{S}_{n_1\cdots n_N}(q_1,\cdots,q_N)=\sqrt{\frac{\prod_i n_i!}{N!}}\sum_P P\left[\underbrace{\varphi_{k_1}(q_1)\cdots}_{n_1}\cdots\underbrace{\cdots\varphi_{k_N}(q_N)}_{n_2}\right] \tag{2}$$

其中的P是只对处于不同单粒子态上的粒子进行对换所构成的置换，（公式2）中的各项彼此是正交的，总的项数为$N!\big/\prod_i n_i!$。

采用坐标表象来描述全同粒子系的量子态是相当繁琐的，利用它进行各种计算很不方便，所以它不是一种令人满意的表象。其根源在于：对于全同粒子进行谢编号是没有意义的，完全是多余的。但在波函数的上述表示方式中又不得不对粒子进行编号，以写出q表象中的某一项波函数[例如$\varphi_{k_1}(q_1)\varphi_{k_2}(q_2)\cdots\varphi_{k_N}(q_N)$]，然后再把对粒子进行各种置换所构成的各项波函数叠加起来，以满足贾环你对称性要求。事实上，只需要把处于每个单粒子态上的粒子数交代清楚，全同粒子系的量子态就算完全确定了，并不需要（也没有意义）区指出处于某单粒子态上的粒子是“哪一个”粒子。这就是（公式2）中用$n_1,n_2,\cdots,n_N$来标记波函数的根据。为避免对全同粒子进行编号，需要脱离q表象。此时，全同Bose子体系的量子态可以用下列右矢来标记：

$$\left|n_1 n_2\cdots n_N\right\rangle \tag{3}$$

这种表示方式称为粒子填布数表象，简称粒子数表象，也称为Fock表象。

对于Fermi子，Pauli原理要求$n_i=1或0$，[即$n_i(n_i-1)=0$]。根据上述精神，（公式1）也可改记为$\phi^{A}_{11\cdots1}(q_1q_2\cdots q_N)$，表示$n_\alpha=n_\beta=\cdots=1$（其余单粒子态上无粒子，$n_i=0$，没有明显写出）。脱离$q$表象后，可记为$\left|n_\alpha=1,n_\beta=1,n_\gamma=1,\cdots\right\rangle$，

简记为$\left|1_\alpha 1_\beta 1_\gamma\cdots\right\rangle或\left|\alpha\beta\gamma\cdots\right\rangle$ （4）

后一式中只标出了被粒子占据的那些单粒子态。

【需要强调的是，费米子一个粒子只允许占据一个单粒子态】

5.1.2产生算符与湮没算符，全同Bose子体系的量子态的描述

为了在粒子数表象中进行各种计算，引进粒子产生算符和湮没算符是很方便的。通过这些算符，就可以把粒子数表象的基矢以及各种类型的力学量方便地表示出来，而且在各种计算中，只需利用这些产生算符和湮没算符的基本对易关系，量子态的置换对称性即可自动得以保证。

【需要回顾一下量子力学卷一的部分内容，进行知识点的整合，有利于本节课知识点的衔接】

一维谐振子的Hamilton量为

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad (5)$$

引入无量纲算符：

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right] \qquad (6)$$
$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right]$$

根据$[x, p] = i\hbar$，易于证明

$$\left[a, a^+\right] = 1 \qquad (7)$$

式子中，$\sqrt{\hbar/m\omega}$ 与 $\sqrt{m\omega\hbar}$ 分别表示谐振子的特征长度和动量。

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+), \quad p = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}i(a^+ - a), \qquad (8)$$

【上式子可以通过将（6）式进行相加减得到】

由此不难求出

$$H = (a^+a + \frac{1}{2})\hbar\omega \qquad (9)$$

其中，$\hbar\omega$ 为谐振子的特征能量。

可以证明，$\hat{N} = a^+a$ 为正定厄米算符，本征方程表示为$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$，本征值为非负整数n=0，1，2，…，相应的归一化本征态（采取适当

的相位）可以表示成

【试用归纳法证明，有利于培养学生的思考能力、动手能力】

$$\left|n\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^{+})^{n}\left|0\right\rangle,\quad n=0,1,2,\cdots \qquad (10)$$

显然，$\left|n\right\rangle$ 也是 H 的本征态，本征值为 $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$，基态为 $\left|0\right\rangle$，能量 $E_n=\hbar\omega/2$ 称为零点能。

利用式（7）和（10）容易看出：

$$\begin{aligned}a^{+}\left|n\right\rangle&=\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle\\ a\left|n\right\rangle&=\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle\end{aligned} \qquad (11)$$

其伴式（adjoint）表示为

$$\begin{aligned}\left\langle n\right|a&=\sqrt{n+1}\left\langle n+1\right|\\ \left\langle n\right|a^{+}&=\sqrt{n}\left\langle n-1\right|\end{aligned} \qquad (12)$$

所以 $a^{+}(a)$ 可以视为谐振子的相邻能级之间的升（降）算符。

但我们也可以采用另一种看法，即把 $\left|0\right\rangle$ 视为真空态，$\left|n\right\rangle$ 视为有n个声子（phonon）的激发态（n=1，2…），每个声子的能量为 $\hbar\omega$.这样，a^{+} 和 a 可理解声子的产生（creation）和湮没（annihilation）算符.

以上讨论可推广到N维谐振子.N维谐振子可以分解为彼此独立的N个一维谐振子。对于不同的谐振子，分别引进相应的声子产生算符 a_i^{+} 和湮没算符 a_i（声子能量为 $\hbar\omega_i$），它们满足下列基本对易式：

$$\begin{aligned}\left[a_i,a_j^{+}\right]&=\delta_{ij}\\ \left[a_i,a_j\right]=\left[a_i^{+},a_j^{+}\right]&=0,i,j=1,2,3,\cdots,N\end{aligned} \qquad (13)$$

而N维谐振子的归一化的能量本征态可表示为

$$\left|n_1n_2\cdots\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\cdots}}(a_1^{+})^{n_1}(a_2^{+})^{n_2}\cdots\left|0\right\rangle \qquad (14)$$

相应的本征值为

$$E_{n_1 n_2 \cdots} = \sum_{i=1}^{N} (n_i + 1/2)\hbar\omega_i \tag{15}$$

Bose子多体系的粒子数表象的基失。

现在借用上述理论形式来描述Bose子多体系在粒子数表象中的基矢，但此时 a_i^+ 与 a_i 应理解为单粒子态 φ_i 上的粒子产生与湮没算符.它们满足对易关系式（13），而式（14）所描述的Bose子多体系的态是：在 φ_i 单粒子态上有 n_i 个Bose子（i=1，2，…），

$$\left| n_1 n_2 \cdots \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\prod_i n_i!}} (a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2} \cdots \left| 0 \right\rangle \tag{16}$$

它是粒子数算符 $\hat{n}_i = a_i^+ a_i$ 的本征态，本征值为 $n_i, (i = 1, 2, \cdots)$。当然，它也是粒子总数算符 $\hat{N} = \sum_{i=1}^{N} \hat{n}_i$ 的本征态，本征值为 $N = \sum_{i=1}^{N} n_i$，显然，式（16）描述的态对于任何两个Bose子的交换是对称的.

类似于式（11），可以证明，在取适当相位规定后

$$\begin{aligned} a_\alpha^+ \left| n_1 n_2 \cdots n_\alpha \cdots \right\rangle &= \sqrt{n_\alpha + 1} \left| n_1 n_2 \cdots (n_\alpha + 1) \cdots \right\rangle \\ a_\alpha \left| n_1 n_2 \cdots n_\alpha \cdots \right\rangle &= \sqrt{n_\alpha} \left| n_1 n_2 \cdots (n_\alpha - 1) \cdots \right\rangle \end{aligned} \tag{17}$$

其共轭式为

$$\begin{aligned} \left\langle \cdots n_\alpha \cdots n_2 n_1 \right| a_\alpha &= \sqrt{n_\alpha + 1} \left\langle \cdots (n_\alpha + 1) \cdots n_2 n_1 \right| \\ \left\langle \cdots n_\alpha \cdots n_2 n_1 \right| a_\alpha^+ &= \sqrt{n_\alpha} \left\langle \cdots (n_\alpha - 1) \cdots n_2 n_1 \right| \end{aligned} \tag{18}$$

5.1.3全同Fermi子体系的体系量子态的描述

对于全同Fermi子多体系，也可类似处理。不同之处在于，考虑到波函数的交换反对称性，每一个单粒子态上最多只允许一个粒子占据.利用粒子产生算符，式$\left| 1_\alpha 1_\beta 1_\gamma \cdots \right\rangle$或$\left| \alpha\beta\gamma \cdots \right\rangle$所示状态可以记为

$$\left| \alpha\beta\gamma \cdots \right\rangle = a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\lambda^+ \cdots \left| 0 \right\rangle \tag{19}$$

a_α^+、a_β^+、$a_\lambda^+ \cdots$ 分别代表在单粒子态 φ_α、φ_β、$\cdots$ 上的粒子产生算符.考虑到交换反对称性，

$$|\beta\alpha\gamma\cdots\rangle = -|\alpha\beta\gamma\cdots\rangle$$

即

$$a_\beta^+ a_\alpha^+ a_\lambda^+ \cdots |0\rangle = -a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\lambda^+ \cdots |0\rangle$$

或

$$(a_\alpha^+ a_\beta^+ + a_\beta^+ a_\alpha^+)|\gamma\cdots\rangle = 0$$

由于$|\gamma\cdots\rangle$是任意的，所以要求

$$a_\alpha^+ a_\beta^+ + a_\beta^+ a_\alpha^+ \equiv \left[a_\alpha^+, a_\beta^+\right]_+ = 0 \qquad (20)$$

显然，上式对于$\alpha=\beta$也适用，这就导致

$$a_\alpha^+ a_\alpha^+ = 0 \quad (\alpha\text{任意}) \qquad (21)$$

此即Pauli原理.式$|\alpha\beta\gamma\cdots\rangle = a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\lambda^+ \cdots |0\rangle$之伴态为

$$\langle\cdots\gamma\beta\alpha| = \langle 0|\cdots a_\gamma a_\beta a_\alpha \qquad (22)$$

与（20）相应，要求

$$\left[a_\alpha, a_\beta\right]_+ \equiv a_\alpha a_\beta + a_\beta a_\alpha = 0 \qquad (23)$$

此即湮没算符满足的反对易式。

考虑到单粒子态的归一性，$\langle\alpha|\alpha\rangle=1$，即$\langle 0|a_\alpha a_\alpha^+|0\rangle = 1$.由于真空态$|0\rangle$及其伴态$\langle 0|$不简并，所以$a_\alpha a_\alpha^+|0\rangle$代表一个确定状态，即真空态

$$a_\alpha a_\alpha^+|0\rangle = a_\alpha|\alpha\rangle = |0\rangle \qquad (24)$$

上式中，α是任意的。这正是湮没算符的性质，按照湮没算符的物理含义，有

$$a_\alpha|0\rangle = 0 \qquad (25)$$

更一般的情况是

$$a_\alpha|\beta\gamma\cdots\rangle = 0(\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\cdots) \qquad (26a)$$

$$a_\alpha|\alpha\beta\gamma\cdots\rangle = |\beta\gamma\cdots\rangle \qquad (26b)$$

利用（20）、（21）和（26），可知

$$
\begin{aligned}
& a_\beta a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\gamma^+ \cdots |0\rangle \\
&= -a_\beta a_\beta^+ a_\alpha^+ a_\gamma^+ \cdots |0\rangle \\
&= -a_\alpha^+ a_\gamma^+ \cdots |0\rangle \\
&= -a_\alpha^+ a_\beta a_\beta^+ a_\lambda^+ \cdots |0\rangle
\end{aligned}
$$

所以

$$(a_\beta a_\alpha^+ + a_\alpha^+ a_\beta)|\beta\gamma\cdots\rangle = 0$$

而对于单粒子态 β 空着的态 $|\gamma\delta\cdots\rangle$，由式（26a）有

$$(a_\beta a_\alpha^+ + a_\alpha^+ a_\beta)|\gamma\delta\cdots\rangle = 0$$

因此，无论对什么态（β 态被占据与否）， $a_\beta a_\alpha^+ + a_\alpha^+ a_\beta$ （$\beta \neq \alpha$）运算的结果均为0，所以

$$\left[a_\alpha^+, a_\beta\right]_+ = 0 \qquad (\beta \neq \alpha) \tag{27}$$

其次，考虑 $a_\alpha a_\alpha^+$ 与 $a_\alpha^+ a_\alpha$ 对 $|\alpha\beta\gamma\cdots\rangle$ 的运算，利用式（21），有

$$a_\alpha a_\alpha^+ \mid \alpha\beta\gamma\cdots >= a_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\gamma^+ \cdots \mid 0 >= 0$$

而利用式（26b），有

$$a_\alpha^+ a_\alpha \mid \alpha\beta\gamma\cdots >= a_\alpha^+ a_\alpha a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\gamma^+ \cdots \mid 0 >$$

$$= a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\gamma^+ \cdots \mid 0 >=\mid \alpha\beta\gamma\cdots >$$

所以

$$(a_\alpha a_\alpha^+ + a_\alpha^+ a_\alpha)|\alpha\beta\gamma\cdots >=|\alpha\beta\gamma\cdots >$$

（28）

而对于 $|\beta\gamma\cdots\rangle$ 态（单粒子态 α 空着）的运算，利用式（26b），

$$a_\alpha a_\alpha^+|\beta\gamma\cdots >=|\beta\gamma\cdots >$$

利用式（26a），有

$a_\alpha^+ a_\alpha|\beta\gamma\cdots >=|\beta\gamma\cdots > (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \cdots)$

所以

$$(a_\alpha a_\alpha^+ + a_\alpha^+ a_\alpha)|\beta\gamma \cdots >=|\beta\gamma \cdots > \qquad (29)$$

联合式（28）、式（29）可知，无论对什么态（单粒子态α被占据与否），$(a_\alpha a_\alpha^+ + a_\alpha^+ a_\alpha)$的作用都相当于恒等算符，即

$$[a_\alpha, a_\alpha^+]_+ = 1 \qquad (30)$$

将式（20）、（23）、（27）、（30）概括起来，表示为

$$\left[a_\alpha, a_\beta^+\right]_+ = \delta_{\alpha\beta} \qquad (31)$$

$$\left[a_\alpha, a_\beta\right]_+ = \left[a_\alpha^+, a_\beta^+\right]_+ = 0$$

它概括了Fermi子产生和湮没算符的全部代数性质。

【费米子部分结尾处有公式推导，在进行教学时，可让学生独立推导，教师辅助学生进行推导，有利于学生的更好掌握。此处可以着重培养学生的动手计算能力，培养学生对量子世界的热爱。】

与Bose子相应的关系式（13）相比，差别只在于对易式换成了反对易式。这是波函数交换对称或反对称的反映。

如把单粒子态上的粒子数明显写出来$\left|n_1 n_2 \cdots\right\rangle$对于Fermi子，$n_i = 1$或0[即$n_i(n_i - 1) = 0$]。与Bose子的式（17）相应，对于Fermi子有

$$a_\alpha|n_1 \cdots n_\alpha \cdots >= (-1)^{\sum_{\nu=1}^{\alpha-1} n_\nu}\sqrt{1-n_\alpha}|n_1 \cdots (n_\alpha + 1) \cdots >=$$
$$\begin{cases} 0 & n_\alpha = 1 \\ (-1)^{\sum_{\nu=1}^{\alpha-1} n_\nu}|n_1 \cdots 1_\alpha \cdots > & n_\alpha = 0 \end{cases} \qquad (32)$$

这是因为不同单粒子态上的（产生和湮没）算符是反对易的，而a_α^+要跨过算符$\left(a_1^+\right)^{n_1} \cdots \left(a_{\alpha-1}^+\right)^{n_{\alpha-1}}$后才能对$\alpha$态上的粒子数进行运算，由于反对易关系，就出现了因子

$$(-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_{\alpha-1}} = (-1)^{\sum_{\nu=1}^{\alpha-1} n_\nu}$$

式（32）可改写成

<table>
<tr><td></td><td>$a_\alpha^+ \left| \cdots n_\alpha \cdots \right>= (-1)^{\sum_{\nu=1}^{\alpha-1} n_\nu} \left| \cdots 1_\alpha \cdots \right> \delta_{n_\alpha 0}$ （33）

类似有

$a_\alpha \left| \cdots n_\alpha \cdots \right>= (-1)^{\sum_{\nu=1}^{\alpha-1} n_\nu} \left| \cdots 0_\alpha \cdots \right> \delta_{n_\alpha 1}$ （34）

它们的伴式为

$\left< \cdots n_\alpha \cdots \right| a_\alpha = (-1)^{\sum_{\nu=1}^{\alpha-1} n_\nu} \left< \cdots 1_\alpha \cdots \right| \delta_{n_\alpha 0}$ （35）

$\left< \cdots n_\alpha \cdots \right| a_\alpha^+ = (-1)^{\sum_{\nu=1}^{\alpha-1} n_\nu} \left< \cdots 0_\alpha \cdots \right| \delta_{n_\alpha 1}$ （36）

【让学生进行自己推导，培养学生的计算能力，将三维目标中情感态度与价值观的思想贯彻到底】</td><td></td></tr>
<tr><td>4.课堂总结</td><td>通过本节课的学习，学生可以知道对全同粒子进行编号是没有意义的；学会表示每个粒子态上的粒子数，学会表示全同粒子系的量子态；学会表示Fermi子和Bose子的产生和湮没算符的全部代数性质。同时，通过本节课，可以进一步培养学社过对于量子力学的热爱，可以起到培养学生严谨的科学学风、科学方法及抽象逻辑思维能力、创新精神等的作用。</td><td>7 分钟</td></tr>
<tr><td>5.作业布置</td><td>一. 利用 Bose 产生和湮没算符的定义

$\hat{a}_i^+ \mid n_1 n_2 \ldots n_i \ldots >= \sqrt{n_i+1} \mid n_1 n_2 \ldots (n_i+1) \ldots >$

$\hat{a}_i \mid n_1 n_2 \ldots n_i \ldots >= \sqrt{n_i} \mid n_1 n_2 \ldots (n_i-1) \ldots >$

证明其满足如下对易关系：

$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^+] = \delta_{ij}, [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^+] = 0$ 。

二、 利用 Fermi 子产生和湮没算符的代数性质：$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta{}^+]_+ = \delta_{\alpha\beta}$，$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta]_+ = [\hat{a}_\alpha{}^+, \hat{a}_\beta{}^+]_+ = 0$，证明：

$\hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha = \hat{a}_\alpha{}^+ \hat{a}_\alpha{}^+ = 0,\ (\hat{a}_\alpha{}^+ \hat{a}_\alpha)^2 = \hat{a}_\alpha{}^+ \hat{a}_\alpha,\quad \hat{a}_\alpha{}^+ \hat{a}_\alpha \hat{a}_\beta{}^+ \hat{a}_\beta = \hat{a}_\beta{}^+ \hat{a}_\beta \hat{a}_\alpha{}^+ \hat{a}_\alpha.$

三、设 $a^\dagger$，$b^\dagger$ 为 a，b 的厄米共轭算符，$[a,a^\dagger]=1$，$[b,b^\dagger]=1$，$[a,b]=0$，$[a,b^\dagger]=0$。定义 $j_x=\frac{\hbar}{2}(b^\dagger a+a^\dagger b)$，$j_y=\frac{i\hbar}{2}(b^\dagger a-a^\dagger b)$，$j_z=\frac{\hbar}{2}(a^\dagger a-b^\dagger b)$，证明 j_x，j_y，j_z 之间满足角动量之间的对易关系。</td><td>3 分钟</td></tr>
</table>