教学简报

2022 年　第 7 期

总第 433 期

鲁东大学教务处　　　　　　　　二〇二二年三月三十日

鲁东大学
课程思政教学典型案例专辑

（二十七）

教务处教学创新与研究科

目　　录

《工程项目管理》思政课堂教学设计与实践

——建设工程招标之招标范围及招标方式

土木工程学院 苑宏宪

一、本节课基本情况介绍

1.授课题目及主要内容

本次课为《工程项目管理》核心章节《工程项目招投标与合同管理》第一环节教学，主题为：建设工程招标之招标范围及招标方式。

2.授课时间、地点、班级

本次课上课时间为 2022 年第四周周三上午第 3、4 节，拟线上教学，上课班级为材料本 1901、1902 班。

3.教学目标

（1）掌握建筑市场中必须招标的工程项目范围，熟悉依法必须招标的项目和可以不进行招标的项目，能够灵活的运用 16 号文和 843 号文对拟建设项目做出是否必须招标的判定，深刻领会遵纪守法、诚实守信、社会责任感、工程与社会、改革开放、科学发展等课程思政元素。

（2）掌握建设工程招标的基本方式，熟悉公开招标和邀请招标的联系与区别，能够对可以邀请招标的项目做出正确的判定并清楚的了解相关审批制度，深刻领会规避招标、合规审批、遵纪守法等课程思政元素。

4.重点难点

重点知识:

（1） 依法必须招标的工程项目规定

（2） 可以不进行招标的项目情形

（3） 招标的方式

难点内容:

（1） 同一项目和同一性质、合并计算的解读

（2） 工程建设项目范围的界定

（3） 国有资金占控股或者主导地位的判定

（4） 邀请招标项目的审批问题

5.教学手段与方法

本次课为线上课程直播课，主要采用案例教学+讲授+讨论的方法。

授课平台：雨课堂（结合 QQ 群）+腾讯会议（备用）

学生互动可以通过线上分组（提前组合）+弹幕+随机点名的方式实施。

二、教学过程设计

1. 授课基本思路

本次课要求学生已经完成了招投标相关法律法规的线上自学内容的学习。

在第一环节授课基本思路如下：

第一步：课程导入

给出经典的导学案例（鲁布革水电站工程项目），以一段 5 分钟左右的视频，引出问题，强调招投标的重要性，让学生领会改革开放带来的建筑市场的技术变革、科学发展等课程思政元素。

问题 1：鲁布革水电站工程项目对中国建筑业具有什么样的重要意义？

问题 2：如何认识住建部办公厅于 2020 年 6 月份发布的《关于开展工程建设行业专项整治的通知》？

基于以上问题，进一步阐述在新时期，在工程建设领域认真贯彻党中央的决策部署，依法规范工程项目招投标，有利于规范建筑市场秩序，构建长效常治的治理机制。

引入本节课的授课要点：招标范围（知识点 1-4）和招标方式（知识点 5-6）。

第二步：招标范围与规模标准（知识点 1-4）

知识点 1：《招标投标法》和《招标投标法实施条例》中关于招标范围的规定。解释上述两个文件容易出现误解的内容。

提出问题：

某市新建污水处理厂项目，采用民营企业投资，财政部门补贴的融资方式。该项目总投资为 5000 万元，当地财政部门通过公共预算资金补贴 100 万元，由于项目部分使用了国有资金，是否需要招标？

【学生讨论，互动】

结合学生的讨论结果进而提出 16 号文和 843 号文。进一步解释国有资金和预算资金的内涵。

针对上述思考题，进一步提出知识点 2、知识点 3、知识点 4。

知识点 2：如何理解部分使用国有资金的工程项目必须招标的规定？

详细介绍 16 号文和 843 号文判定工程项目招标的条件。强调遵纪守法、严禁规避

招标、合规审批等课程思政元素以及工程实践技能。

引入拓展案例 1：2020 年 8 月某市城市主干道进行改造，私有投资 3000 万元，财政预算资金投入 300 万元。请问该项目是否应当必须招标？

【学生讨论，互动】

知识点 3：如何理解国有企业事业单位资金占控股或者主导地位的项目？

结合《公司法》第 216 条的规定进行解释。

引入拓展案例 2：已知 A、B、C 三家企业成立股份公司 D，其中 A 为国有企业占股 25%，B 为国有企业占股 26%，C 私有企业占股 49%，现 D 公司投资 20000 万元新建 1 栋商品住宅楼。请问该项目是否必须招标？

【学生讨论，互动】

知识点 4：如何理解“同一项目”？

此处主要解释“三同”，应特别强调依法必须进行招标的项目的招标人不得利用划分标段规避招标，强化学生的法制意识。

引入拓展案例 3：某市政府使用国有资金投资新建 30 公里公路，分两个标段进行施工监理招标。一标段 14 公里，监理合同估算价 80 万元，计划 2020 年 7 月 30 日招标。二标段 16 公里，监理合同估算价 90 万元，计划 2021 年 1 月 30 日招标。请问该项目的监理服务是否必须招标？

第三步：可以不进行招标的建设工程项目（知识点 5）

阐述《招标投标法》第六十六条、《招标投标法实施条例》第九条、《工程建设项目施工招标投标办法》关于可以不进行招标的建设工程项目的规定，强调具体问题具体分析，以及法律文件隐含条件的理解与运用。

【学生讨论，互动】

第四步：招标方式（知识点 6）

阐述公开招标和邀请招标的概念、联系与区别。

介绍应该公开招标，可以邀请招标的具体情形以及审批的规定。

进而介绍《工程建设项目施工招标投标办法》第十一条有关施工任务可以邀请招标的情形及其审批部门。

本部分需要强化遵纪守法、合规审批等课程思政元素。

第五步：知识回顾与总结

2. 过程环节设计及时间安排

（1）课程导入 **（约 15 分钟）**

1）鲁布革水电站视频资料。（5-6 分钟）

2）《关于开展工程建设行业专项整治的通知》介绍。（4-5 分钟）

3）学生互动讨论。（4-5 分钟）

（2）知识点 1：建设工程招标范围的规定 **（约 15 分钟）**

1）《招标投标法》及实施条例的规定。（约 5 分钟）

2）思考与讨论。（约 5 分钟）

3）16 号文和 843 号文。（约 5 分钟）

（3）知识点 2：如何理解部分使用国有资金的工程项目必须招标的规定？（约 15 分钟）

1）16 号文中对部分使用国有资金的工程项目必须招标的规定解析。（5 分钟）

2）拓展案例 1 及互动讨论。（8-10 分钟）

（4）知识点 3：如何理解国有企业事业单位资金占控股或者主导地位的项目？（约 15 分钟）

1）16 号文国有企业事业单位资金占控股或者主导地位的项目解析。（5 分钟）

2）拓展案例 2 及互动讨论。（8-10 分钟）

（5）知识点 4：如何理解“同一项目”？ **（约 15 分钟）**

1）同一项目的内涵（5 分钟）

2）拓展案例 3 及互动讨论.（8-10 分钟）

（6）知识点 5:可以不进行招标的建设工程项目 **（约 5 分钟）**

（7）知识点 6:建设工程招标的方式 **（约 5 分钟）**

（8）知识回顾并强调本次课程思政元素 **（约 5 分钟）**

本节课具体流程可参见表 3.1 所示。

3.核心知识

（1）建设工程招标投标

是指建设单位对拟建的建设工程项目通过法定的程序和方式吸引承包单位进行公平竞争，并从中选择条件优越者来完成建设工程任务的行为。这是市场经济条件下常用的建设工程项目交易方式。

（2）必须招标的工程项目的规定

《招标投标法》第三条 ：

在中华人民共和国境内进行下列工程建设项目包括项目的勘察、设计、施工、监理以及与工程建设有关的重要设备、材料等的采购，必须进行招标:

（一）大型基础设施、公用事业等关系社会公共利益、公众安全的项目;

（二）全部或者部分使用国有资金投资或者国家融资的项目;

（三）使用国际组织或者外国政府贷款、援助资金的项目。

前款所列项目的具体范围和规模标准，由国务院发展计划部门会同国务院有关部门制订，报国务院批准。

法律或者国务院对必须进行招标的其他项目的范围有规定的，依照其规定。

《招标投标法实施条例》第三条:

依法必须进行招标的工程建设项目的具体范围和规模标准，由国务院发展改革部门会同国务院有关部门制订，报国务院批准后公布施行。

特别强调: 工程建设项目的范围界定要准确，实践中容易产生扩大或者缩小的误区。《招标投标法实施条例》第二条和《政府采购发实施条例》第七条做了明确的界定。工程建设项目，是指工程以及与工程建设有关的货物、服务。

（3）《必须招标的工程项目规定》（16 号文）

第二条 全部或者部分使用国有资金投资或者国家融资的项目包括:（一）使用预算资金 200 万元人民币以上，并且该资金占投资额 10%以上的项目;（二）使用国有企业事业单位资金，并且该资金占控股或者主导地位的项目。

第三条 使用国际组织或者外国政府贷款、援助资金的项目包括:（一）使用世界银行、亚洲开发银行等国际组织贷款、援助资金的项目;（二）使用外国政府及其机构贷款、援助资金的项目。

第四条 不属于本规定第二条、第三条规定情形的大型基础设施、公用事业等关系社会公共利益、公众安全的项目，必须招标的具体范围由国务院发展改革部门会同国务院有关部门按照确有必要、严格限定的原则制订，报国务院批准。

第五条 本规定第二条至第四条规定范围内的项目，其勘察、设计、施工、监理以及与工程建设有关的重要设备、材料等的采购达到下列标准之一的，必须招标:（一）施工单项合同估算价在 400 万元人民币以上;（二）重要设备、材料等货物的采购，单项合同估算价在 200 万元人民币以上;（三）勘察、设计、监理等服务的采购，单项合同估算价在 100 万元人民币以上。同一项目中可以合并进行的勘察、设计、施工、监理以及与工程建设有关的重要设备、材料等的采购，合同估算价合计达到前款规定标准的，

必须招标。

（4）《必须招标的基础设施和公用事业项目范围规定》（843号文）

第二条 不属于《必须招标的工程项目规定》第二条、第三条规定情形的大型基础设施、公用事业等关系社会公共利益、公众安全的项目，必须招标的具体范围包括:

（一）煤炭、石油、天然气、电力、新能源等能源基础设施项目;

（二）铁路、公路、管道、水运，以及公共航空和 A1 级通用机场等交通运输基础设施项目;

（三）电信枢纽、通信信息网络等通信基础设施项目;

（四）防洪、灌溉、排涝、引（供）水等水利基础设施项目;

（五）城市轨道交通等城建项目。

（5）16号文中对部分使用国有资金的工程项目必须招标的规定解析

第一种情况: 全部使用国有资金或者国家融资的资金及国有企业事业单位资金占控股或者主导地位的工程项目。

第二种情况: 全部使用非国有资金或者非国家融资的工程项目。

第三种情况: 属于混合资金的工程项目。

特别强调: 该问题需要16号文和843号文结合进行分析，准确领会文件精神，做到严格**遵纪守法，诚实守信**。

（6）16号文国有企业事业单位资金占控股或者主导地位的项目解析

（1）关于控股股东的准确定义

（2）关于国有资金比例和国有企事业单位资金的明确定义

特别强调: 需要根据《公司法》第216条第二项规定准确定义

（7）两个疑难问题的解读

1）同一项目: 一般可以按同一立项批文、同一项目性质、同一采购人“三同”来理解和把握，同一立项批文是指工程建设项目一同审批、核准和备案的项目，若单独立项的项目单独计算。**同一性质**是指勘察、设计、施工、监理以及与工程建设有关的重要设备、材料等这五种类型相同。

2）合并计算: 同一项目中单项合同估算价可以合并的应当合并来计算，实质是规范同一建设项目中可划分为多个标段进行采购的行为。依法必须进行招标的项目的招标人不得利用划分标段规避招标。

（8）可以不进行招标的建设工程项目

《招标投标法》第六十六条：涉及国家安全、国家秘密、抢险救灾或者属于利用扶贫资金实行以工代赈、需要使用农民工等特殊情况，不适宜进行招标的项目，按照国家有关规定可以不进行招标。

《招标投标法实施条例》第九条：除招标投标法第六十六条规定的可以不进行招标的特殊情况外，有下列情形之一的，可以不进行招标：

（一）需要采用不可替代的专利或者专有技术；

（二）采购人依法能够自行建设、生产或者提供；

（三）已通过招标方式选定的特许经营项目投资人依法能够自行建设、生产或者提供；

（四）需要向原中标人采购工程、货物或者服务，否则将影响施工或者功能配套要求；

（五）国家规定的其他特殊情形。

《工程建设项目施工招标投标办法》第十二条规定了可以不进行施工招标的六种情形。

（一）涉及国家安全、国家秘密或者抢险救灾而不适宜招标的；

（二）属于利用扶贫资金实行以工代赈需要使用农民工的；

（三）施工主要技术采用特定的专利或者专有技术的；

（四）施工企业自建自用的工程，且该施工企业资质等级符合工程要求的；

（五）在建工程追加的附属小型工程或者主体加层工程，原中标人仍具备承包能力的；

（六）法律、行政法规规定的其他情形。

特别强调：自行建设、生产或者提供建设工程项目，前提是该企业满足承揽相应工程的资质条件。

（9）建设工程招标的方式

《招标投标法》第十条：

（1）公开招标（无限竞争招标）：招标人以招标公告的方式邀请不特定的法人或者其他组织投标。（提醒：《招标公告和公示信息发布管理办法》（发改委 2017 第 10 号令））

（2）邀请招标（有限竞争招标）：招标人以投标邀请书的方式邀请特定的法人或者其他组织投标。

《招标投标法实施条例》第八条：应当公开招标项目有下列情形之一的，可以邀请

招标。

（一）技术复杂、有特殊要求或者受自然环境限制，只有少量潜在投标人可供选择;

（二）采用公开招标方式的费用占项目合同金额的比例过大。

《招标投标法》第十一条: 国务院发展计划部门确定的国家重点项目和省、自治区、直辖市人民政府确定的地方重点项目不适宜公开招标的，经国务院发展计划部门或者省、自治区、直辖市人民政府批准，可以进行邀请招标

特别强调: 民事诉讼法第四十八条规定的其他组织是指合法成立、有一定的组织机构和财产,但又不具备法人资格的组织。

（10） 有关施工任务可以邀请招标的情形

《工程建设项目施工招标投标办法》第十一条:

国务院发展计划部门确定的国家重点建设项目和各省、自治区、直辖市人民政府确定的地方重点建设项目，以及全部使用国有资金投资或者国有资金投资占控股或者主导地位的工程建设项目，应当公开招标;有下列情形之一的，经批准可以进行邀请招标:

（一）项目技术复杂或有特殊要求，只有少量几家潜在投标人可供选择的;

（二）受自然地域环境限制的;

（三）涉及国家安全、国家秘密或者抢险救灾，适宜招标但不宜公开招标的;

（四）拟公开招标的费用与项目的价值相比，不值得的;

（五）法律、法规规定不宜公开招标的。

特别强调: 关于上述三类项目采取邀请招标方式的审批的问题

4.本次课程教学设计的特别说明

本次课互动环节设计:共设计 4-5 次课堂互动，分别为导学资料小组讨论、招标范围思考与讨论、拓展案例 1 小组讨论、拓展案例 2 小组讨论、拓展案例 3 小组讨论与提问。提前安排线上学习小组并发布讨论主题，4-5 人组成一个小组共同讨论分析问题，每位同学均可以提前沟通交流，可以就全部拓展案例和思考讨论题发表看法。讨论小组不设组长，可以通过非正式团队考察学生的团队协作、沟通交流能力和担当精神。

本次课课程思政元素主要涉及三个层面:

社会层面:工程与社会（严禁规避招标、合规审批）、科学发展观（竞争与效率）

团队层面:团队协作、沟通交流

个人层面:遵纪守法、诚实守信、担当精神、社会责任感

社会层面思政元素主要通过导入案例和拓展案例分析体现，团队层面思政元素主要

通过课堂小组讨论体现，个人层面思政元素通过团队成员发言及主动回答问题体现。

本次课的重点内容主要通过整理知识图谱、表格等方式在教学课件中加以强调，对于几个难点问题则结合拓展案例和教学互动加深对现行法律文件的理解，实现理论与实践的结合。

三、雨课堂实施及教学总结

1. 雨课堂课前准备

为便于学生课前预习及开展课堂互动交流，在线上教学开始之前需要完成三项准备工作：

第一、提前通过雨课堂公告发布“自学用文献资料”。主要包括常用法律法规文件、招标文件示范文本等 10 个文件。参见图 3.1。

第二、提前通过雨课堂发布教学导学课件，熟悉主要知识体系框架，并设置客观题目掌握学生预习效果。参见图 3.2。

第三、提前通过雨课堂设置分组，并在雨课堂讨论区发布分组讨论案例和导入问题，指导各组开展课程思政案例讨论。根据班级人数，本次教学活动采取随机分组的方式，划分为 15 组，每组约 5 人。该部分讨论题设置为记分讨论，计入平时成绩。参见图 3.3 及 3.4。

图 3.1 雨课堂公告发布的“自学用文献资料”

图 3.2 雨课堂预习课件完成情况

图 3.3 第四周周三课堂分组

图 3.4 雨课堂讨论区发布分组讨论的拓展案例和导入问题

2. 雨课堂课中教学组织

课堂组织流程如下表所示:

表 3.1 第四周课堂组织流程

<table>
<tr><th>教学环节</th><th colspan="2">教学内容</th><th>思政内容</th><th>时间分配</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1 第一步：课程导入（约 15 分钟）</td><td colspan="2">鲁布革水电站视频</td><td>回顾历史：阐述改革开放四十年建筑市场技术变革、科学发展等课程思政元素</td><td>视频约 5 分钟，回顾分析约 2 分钟</td></tr>
<tr><td colspan="2">住建部关于开展工程建设行业专项整治的通知</td><td rowspan="2">回到当前：贯彻中央部署、依法规范招投标、规范建筑市场秩序、构建长效常治治理机制、理解工程与社会的关系</td><td>约 4 分钟</td></tr>
<tr><td colspan="2">学生分组讨论</td><td>约 4-5 分钟</td></tr>
<tr><td rowspan="9">第二步：招标范围（知识点 1-4）（约 60 分钟）</td><td rowspan="3">知识点 1：建设工程招标范围的规定</td><td>《招标投标法》和《实施条例》的规定</td><td rowspan="3">引导学生正确理解法律规定的含义</td><td>约 5 分钟</td></tr>
<tr><td>问题导入案例及讨论</td><td>约 5 分钟</td></tr>
<tr><td>16 号文和 843 号文</td><td>约 5 分钟</td></tr>
<tr><td rowspan="2">知识点 2：如何理解部分使用国有资金的工程项目必须招标的规定</td><td>16 号文相关内容解析</td><td rowspan="6">强调遵纪守法、严禁规避招标、合规审批等思政元素及工程招标决策实践技能，强化学生法制意识</td><td>约 5 分钟</td></tr>
<tr><td>拓展案例 1 及学生分组讨论</td><td>介绍案例 2 分钟、互动讨论 6-8 分钟</td></tr>
<tr><td rowspan="2">知识点 3：如何理解控股或者主导地位</td><td>16 号文相关内容解析</td><td>约 5 分钟</td></tr>
<tr><td>拓展案例 2 及学生分组讨论</td><td>介绍案例 2 分钟、互动讨论 6-8 分钟</td></tr>
<tr><td rowspan="2">知识点 4：如何理解“同一项目”</td><td>同一项目的内涵</td><td>约 5 分钟</td></tr>
<tr><td>拓展案例 3 及学生分组讨论</td><td>介绍案例 2 分钟、互动讨论 6-8 分钟</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第三步：可以不进行招标的项目（约 5-10 分钟）</td><td rowspan="2">知识点 5：可以不进行招标的的建设工程项目</td><td>《招标投标法》第 66 条、《实施条例》第 9 条、《办法》第 12 条</td><td rowspan="2">强调具体问题具体分析、理解并灵活运用法律规定隐含条件</td><td>约 4-5 分钟</td></tr>
<tr><td>学生分组讨论</td><td>约 3-5 分钟</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第四步：招标方式（约 5-10 分钟）</td><td rowspan="2">知识点 6：招标方式</td><td>《招标投标法第十条》</td><td rowspan="2">遵纪守法、合规审批、强化工程实践技能和法制意识</td><td>约 3-5 分钟</td></tr>
<tr><td>可以邀请招标的情形</td><td>约 3-5 分钟</td></tr>
</table>

	及审批的规定		
第五步：知识回顾与总结（约 3-5 分钟）	建设工程招标知识框架 思政元素总结及课下实践	职业道德素养、团队合作、工程与社会、紧跟中央工作部署、与时俱进、一带一路与“走出去”战略	约 3-5 分钟

本次课课前及课中互动根据课堂情况可以采取发布弹幕、发布课堂练习题、投稿等方式。本次课课堂发布的练习题及课堂参与情况参见图 3.5。

图 3.5 第四周课前及课中客观题互动情况

3. 课后总结

（1）任务驱动式的教学方法提升了教学效果和学生学习积极性。本次课在教学内容设计中结合法律条文，增设了 4 个教学案例，并在课前通过雨课堂讨论区发布，提前分组讨论，有效的激励了学生的主观能动性和课堂参与的积极性，加深了对内容相对比较枯燥的法律条文的理解，课后对部分学生调查发现，普遍比较认可此种模式的学习。

（2）灵活运用辅助教学平台的课堂工具。讨论区、签到、随机点名、分组互动、课上练习与互动（弹幕、投稿等）可以及时了解并检验学生对课堂知识的掌握程度，在互动交流过程中实现教师对疑难点的进一步讲解，实现学生知识的延伸与能力提升，从“要我学”转变为“我要学”、“我在学”。

（3）通过典型案例视频和最新政策文件以及工程案例分组讨论和深入分析，可以实现在润物细无声中融入课程思政元素，通过知识回顾和总结，达到豁然开朗，见山还是山的观念的提升。

（4）课前预热。课前将教学内容的预备知识、课堂参与内容、课堂流程组织模式

通过辅助教学平台工具提前告诉学生，提前准备好学习工具和预习课堂内容，最终实现课前预热、课中顺利实施的状态。

《二元函数的极限》课程思政教学设计

数学与统计科学学院 张丽娟

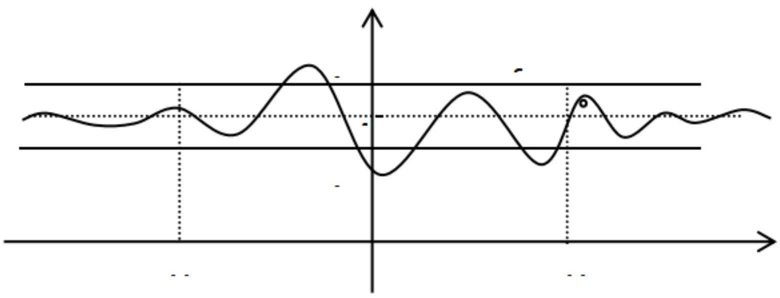
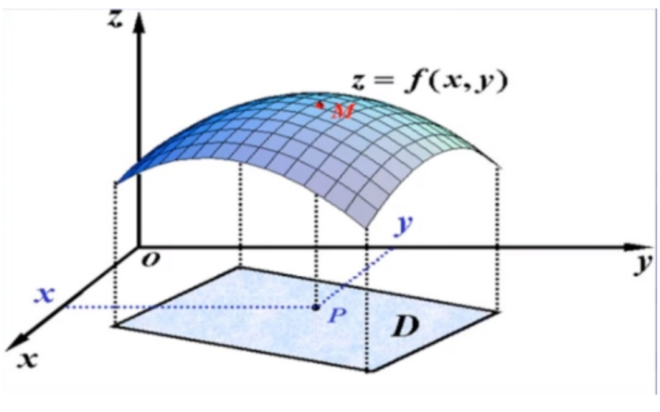
数学分析课程负责人：王秀红

课程思政教学团队：樊永红 张丽娟 崔少燕等

<table>
<tr><td>教学内容</td><td colspan="2">二元函数的极限</td><td>所属课程</td><td>数学分析 3</td></tr>
<tr><td>授课对象</td><td colspan="2">数学与应用数学本科生</td><td>授课时长</td><td>50 分钟</td></tr>
<tr><td>教学背景</td><td colspan="4">《二元函数的极限》位于第十二章多元函数的极限与连续这部分内容的开头，是学习本章基础. 极限的思想是近代数学的一种重要思想，数学分析就是以极限概念为基础、极限理论(包括级数)为主要工具来研究函数的一门学科。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：使学生深刻理解二元函数极限的定义，并掌握用定义验证二元函数极限的方法.
能力目标：通过二元函数极限的形成过程让学生掌握从具体到抽象，从特殊到一般的思维方法，领悟极限思想，提高类比归纳、抽象概括、联系与转化的思维能力.
德育目标：通过二元函数极限概念的形成过程，揭示量变与质变、运动与静止、近似与精确的辩证唯物主义思想，引导学生提炼蕴藏于教学内容中的马克思主义哲学思想，由量变和质变、运动和静止、近似与精确这三对矛盾在一定条件下的转化，印证对立统一是宇宙的根本规律.</td></tr>
<tr><td>重难点分析</td><td colspan="4">重点：二元函数极限的定义及二元函数极限定义的理解.
难点：用定义证明函数的极限.</td></tr>
<tr><td>教学手段和教学方法</td><td colspan="4">授课教师黑板教授为主，多媒体展示为辅.
问题驱动法、直观演示法、启发式讲授法、讨论法，教师的讲解与学生的探究相结合，辅助学生的练习，同时实时插入数学史，融入思政元素，充分调动学生主动性和思考问题的积极性.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">思政理念</td><td>思政素材</td><td colspan="3">解读方向</td></tr>
<tr><td>1. 提出问题：回忆一</td><td colspan="3">培养学生的系统思维，提出问题——分析问题——解决问题——科学思考——得到最终结论.</td></tr>
</table>

	元函数极限的定义，类比的方式考虑二元函数极限定义，并区分异同之处	
	2. 法国数学家、物理学家、天文学家柯西	19 世纪初期，微积分已发展成一个庞大的分支，，内容丰富，应用非常广泛。与此同时，它的薄弱之处也越来越暴露出来，微积分的理论基础并不严格。为解决新问题并澄清微积分概念，数学家们展开了数学分析严谨化的工作，在分析基础的奠基工作中，做出卓越贡献的要首推伟大的数学家柯西。
	3. 德国数学家魏尔施特拉斯	维尔斯特拉斯的主要贡献在数学分析、解析函数论、变分法、微分几何学和线性代数等方面。他是把严格的论证引进分析学的一位大师，被誉为“现代分析之父”。他的批判精神对 19 世纪数学产生很大影响。
	5. 辩证的看待连续性的概念	极限思想揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系，是唯物辩证法的对立统一规律在数学领域中的应用。借助极限思想，人们可以从有限认识无限，从"不变"认识"变"，从直线形认识曲线形，从量变认识质变，从近似认识精确。
教学设计思路	一元函数极限定义 $\Downarrow$ 二元函数极限定义 $\Rightarrow$ 动点$(x,y)\xRightarrow[\text{任何方向}]{\text{任何方式}}(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)\to A$ 动点$(x,y)\xRightarrow[\text{特定方向}]{\text{特定方式}}(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)\to A$ 动点$(x,y)\xRightarrow[\text{不同方向}]{\text{不同方式}}(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)\to$不同值	

教学过程

<table>
<tr><th></th><th>内容</th><th>时间</th></tr>
<tr><td>一、二元函数极限的概念</td><td>回忆：一元函数极限.
研究一元函数的极限的思想方法是研究二元函数极限的基础，但又有不同是因为二元函数的自变量有两个，所以判断二元函数的极限存在与否以及它的求解方法的时候，跟求解一元函数的极限比起来就显得更加的麻烦。
一元函数极限定义的简单表述:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon >0$，$\exists\, \delta >0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$|f(x)-A|<\varepsilon$.
上述极限中：$x\to x_0$ 是在 x 轴上从 x_0 的左，右两侧向 x_0 趋近时，函数 $f(x)\to A$.


二元函数极限，当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 即 $P(x,y)\to P(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)\to A$.
这里的 $P\to P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0，也就是点 P 与点 P_0 之间的距离趋于零，与一元函数极限概念类似，</td><td>25 分钟</td></tr>
</table>

如果在点$P(x,y)\to P(x_0,y_0)$的过程中，函数$f(x,y)$无限接近于一个确定的常数A，我们就说A为函数$z=f(x,y)$当$x\to x_0$，$y\to y_0$时的极限，下面用$\varepsilon-\delta$语言描述这个极限概念.

定义 1 设f为定义在$D\subset R^2$上的二元函数，P_0是D的一个聚点，A是一个确定的实数.若对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$使得当$P\in U^\circ(P_0;\delta)\cap D$时，恒有

$$\left|f(P)-A\right|<\varepsilon$$

则称**函数f在D上当$P\to P_0$时，以A为极限**，记作

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in D}} f(P)=A \qquad (1)$$

在对于$P\in D$不致产生误解时，也可简单

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A. \qquad (1')$$

当P,P_0分别用坐标(x,y), (x_0,y_0)表示时，(1′)式也常写作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$ (1″)

例 1. 依定义验证$\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to1}}\left(x^2+xy+y^2\right)=7$.

证 因为

$\left|\left(x^2+xy+y^2\right)-7\right|$

	$=\left\|\left(x^2-4\right)+xy+\left(y^2-1\right)-2\right\|$ $=\left\|(x+2)(x-2)+(x-2)y+2(y-1)+(y+1)(y-1)\right\|$ 先 限 $\le\|x-2\|\|x+y+2\|+\|y-1\|\|y+3\|$. 制在点$(2,1)$的$\delta=1$的方邻域 $$\{(x,y)\mid\|x-2\|<1,\|y-1\|<1\}$$ 内讨论，于是有 $\|y+3\|=\|y-1+4\|\le\|y-1\|+4<5$， $\|x+y+2\|=\|(x-2)+(y-1)+5\|\le\|x-2\|+\|y-1\|+5<7$， 所以 $\left\|x^2+xy+y^2-7\right\|<7\|x-2\|+5\|y-1\|<7\left(\|x-2\|+\|y-1\|\right)$. 设$\forall\varepsilon>0$,要使不等式 $$\left\|x^2+xy+y^2-7\right\|<7\left(\|x-2\|+\|y-1\|\right)<\varepsilon$$ 成立.取$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{14},1\right\}$，则当$\|x-2\|<\delta,\|y-1\|<\delta$，且 $(\mathrm{x},\mathrm{y})\ne(2,1)$时，恒有 $$\left\|x^2+xy+y^2-7\right\|<\varepsilon,$$ 即 $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to1}}\left(x^2+xy+y^2\right)=7$.	

例 2. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & ,\quad (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

证 对函数作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，这时 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于对任何 θ 都有 $r\to 0$，由于

$$\left|f(x,y)-0\right|=\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{1}{4}r^2\left|\sin 4\theta\right|\leq\frac{1}{4}r^2$$

因此，对 $\forall\varepsilon>0$，只须取 $\delta=2\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<r=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，不管 θ 取什么值都有

$$\left|f(x,y)-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

【德育元素】19 世纪，法国数学家柯西在前人工作的基础上，比较完整地阐述了极限概念及其理论，他在《分析教程》中指出：“当一个变量逐次所取得值无线趋近于一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多小就多小，这个定值就叫做所有其他值得极限值，特别地，当一个变量的数值（绝对值）无限地减少使之收敛到极限 0，就说这个变量称为无穷小”. 柯西试图消除极限概念中的几何直观，作出极限的明确定义，然后去完成牛顿的愿望。但柯西的叙述中还存在描述性的词语，如“无限趋

	近”“要多小就多小”等，因此还保留着几何和物理的直观痕迹，没有彻底严密化。为了排除极限概念中的直观痕迹，维尔斯特拉斯提出了极限的静态的定义，给微积分提供了严格的理论基础。通过介绍激发学生的学习兴趣，让学生了解数学发生、发展的相关历史，提高学生的人文素养.	
二、二元函数极限存在的条件	下列定理及其推论相当于数列极限的子列定理与一元函数极限的海涅归结原则（而且证明方法也相似）. 我们可通过它们进一步认识定义 1 中“$P\to P_0$”所包含的意义. **定理 16.5** $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)=A$的充要条件是：对于$D$的任意子集$E$，只要$P_0$是$E$的聚点，就有 $$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in E}} f(P)=A.$$ **注 1.** 这里说的当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)\to A$是指(x,y)以任何方式趋于(x_0,y_0)时，函数$f(x,y)$都趋于A，因为平面上由一点到另一点有无数条路线，因此二元函数当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，要比一元函数中当$x\to x_0$复杂的多. **推论 1.** 设$E_1\subset D$, P_0是E_1的聚点，若$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_1}} f(P)$不存在，则$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(P)$也不存在.	25 分钟

	注 2. 如果(x,y)以某一特殊方式趋于(x_0,y_0)时，使函数极限不存在，则断定函数的极限不存在. **推论 2.** 设$E_1,E_2\subset D$, P_0是它们的聚点，若存在极限 $$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E_1}}f(P)=A_1 \quad , \quad \lim_{\substack{P\to P_0\\P\in E_2}}f(P)=A_2 \quad ,$$ 但$A_1\ne A_2$, 则$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$不存在. **注 3.** 动点$(x,y)$某两种特殊方式趋于$(x_0,y_0)$ 时，函数$f(x,y)$趋于不同值，此时可以断定函数的极限不存在. **推论 3.** 极限$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}}f(P)$存在的充要条件是：对于$D$中任一满足条件$P_n\ne P_0$且$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$的点列$\{P_n\}$，它所对应的函数列$\{f(P_n)\}$都收敛. **例 3.** 讨论$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$当$(x,y)\to(0,0)$是否存在极限. **解** 当点$(x,y)$沿直线$y=mx$趋于$(0,0)$时，由于此时 $$f(x,y)=f(x,mx)=\frac{m}{1+m^2} \quad ,$$ 因而有 $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,mx)=\frac{m}{1+m^2} \quad .$$	

	这说明动点沿不同斜率 m 的直线趋于原点时，对应的极限值也不同，因此所讨论的极限不存在. **注 4.** （1）以上关于二元函数的极限概念，可以方便推广到 n 元函数中， （2）关于二元函数的极限运算，有与一元函数类似的运算法则. **【自主求解】** 本节以一元函数的极限为基础，进一步介绍二元函数的极限，学生已经对一元函数的极限问题有了较为系统的理解，在此基础上，进一步深入理解二元函数极限的概念以及验证技巧. **【德育元素】**  **柯西（Cauchy，Augustin Louis** 1789—1857）是法国数学家、物理学家、天文学家。19 世纪初期，微积分已发展成一个庞大的分支，，内容丰富，应用非常广泛。与此同时，它的薄弱之处也越来越暴露出来，微积分的理论基础并不严格。为解决新问题并澄清微积分概念，数学家们展开了数学分析严谨化的工作，在分析基础的奠基工作中，做出卓越贡献的要首推伟大的数学家柯西。 柯西在综合工科学校所授分析课程及有关教材给数学界造成了极大的影响。自从牛顿和莱布尼茨发明微积分（即无穷小分析，简称分析）以来，这门学科的理论基础是模糊的。为了进一步发展，必须建立严格的理论。柯西为此首先成功地建立了极限论。 微积分从诞生的第一天开始，就没有离开过矛盾和	

驳论。如果，透过这些争论，可以发现其实他们不过是变相的探讨最终形态的问题！正如莱布尼兹关注微粒最终命运一样。有一些人说：柯西-威尔斯特拉斯的极限定义，有“极限回避”的现象。这种说法是片面的也是不客观的，但还是指出了一些问题。柯西-威尔斯特拉斯的极限定义，被翻译成中国语言的时候，是非常经典的。柯西-威尔斯特拉斯的极限定义，不单纯的定义了极限，还刻画了一种运动现象-向极限靠近的运动。最后画龙点睛，把最终形态 a 叫做极限。

卡尔·特奥多尔·威廉·魏尔施特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstraß，姓氏可写作 Weierstrass，1815—1897），德国数学家，被誉为“现代分析之父”。生于威斯特法伦(Westfalen)的奥斯滕费尔德(Ostenfelde)（今德国），逝于柏林。

魏尔斯特拉斯在数学分析领域中的最大贡献，是在柯西、阿贝尔等开创的数学分析的严格化潮流中，以 ε－δ 语言，系统建立了实分析和复分析的基础，基本上完成了分析的算术化。他引进了一致收敛的概念，并由此阐明了函数项级数的逐项微分和逐项积分定理。在建立分析基础的过程中，引进了实数轴和 n 维欧氏空间中一系列的拓扑概念，并将黎曼积分推广到在一个可数集上的不连续函数之上。1872 年，魏尔斯特拉斯给出了第一个处处连续但处处不可微函数的例子，使人们意识到连续性与可微性的差异，由此引出了一系列诸如皮亚诺曲线等反常性态的函数的研究。希尔伯特对他的评价是:″魏尔斯特拉斯以其酷爱批判的精神和深邃的洞察

	力，为数学分析建立了坚实的基础。通过澄清极小、极大、函数、导数等概念，他排除了在微积分中仍在出现的各种错误提法，扫清了关于无穷大、无穷小等各种混乱观念，决定性地克服了源于无穷大、无穷小朦胧思想的困难。今天，分析学能达到这样和谐可靠和完美的程度本质上应归功于魏尔斯特拉斯的科学活动”。	
课堂小结	二元函数极限的定义 $\Rightarrow$ 动点$(x,y)\xRightarrow[\text{任何方向}]{\text{任何方式}}(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)\to A$ 动点$(x,y)\xRightarrow[\text{特定方向}]{\text{特定方式}}(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)\to A$ 动点$(x,y)\xRightarrow[\text{不同方向}]{\text{不同方式}}(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)\to$不同值	
教学总结	本节课通过回忆一元函数极限的定义，通过类比的方式引出二元函数极限的定义，从已知的知识推未知知识的方式学习二元函数极限的定义，然后通过类比一元函数极限的海涅归结原则（而且证明方法也相似）推到出定理 16.5 以及定理 16.5 的三个推论. 整体过程比较顺畅.	

《二元函数的连续性》课程思政教学设计

数学与统计科学学院　崔少燕

数学分析课程负责人 王秀红

课程思政教学团队：王秀红 宋美 崔少燕 张丽娟 包贵 高荣 邵晶晶

<table>
<tr><td>教学内容</td><td colspan="2">二元函数的连续性</td><td>所属课程</td><td>数学分析 3</td></tr>
<tr><td>授课对象</td><td colspan="2">数学与应用数学本科生</td><td>授课时长</td><td>50 分钟</td></tr>
<tr><td>教学背景</td><td colspan="4">在多元微积分中所讨论的函数中，最重要的一类就是连续函数，这与一元微积分中所讨论的一元函数的连续性是类似的。二元函数连续性的定义是一元函数连续性的进一步推广，它比一元函数更一般化，但它们的局部性质与在有界闭域上的整体性质则完全相同。</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="4">知识目标：由一元函数的连续性定义，类比得出二元函数的连续性定义，复合函数的连续性定理，有界闭域上连续函数的性质。
能力目标：通过一元与多元类比的学习方法，体会一元函数到二元函数极限的异同点，连续的定义的异同点，培养学生分析问题、解决问题和辩证思维的能力.
德育目标：通过多元函数与一元函数连续性的类比学习，展示问题考虑全面性，多元函数的复杂性，培养学生不畏艰难，刻苦求知的探索精神。引申出生活就是连续函数，只有不断付出努力的过往，才能收获今日的成功，引发共鸣，使学生的思想得以升华。</td></tr>
<tr><td>重难点分析</td><td colspan="4">重点：二元函数连续性概念的理解。
难点：有界闭域上连续函数的性质。</td></tr>
<tr><td>教学手段和教学方法</td><td colspan="4">授课教师黑板教授为主，多媒体展示为辅.
问题驱动法、直观演示法、启发式讲授法、讨论法，教师的讲解与学生的探究相结合，辅助学生的练习，同时实时插入数学史，融入思政元素，充分调动学生主动性和思考问题的积极性.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">思政理念</td><td>思政素材</td><td colspan="3">解读方向</td></tr>
<tr><td>1. 由一元函数连续定义如何</td><td colspan="3">培养学生的系统思维，提出问题-分析问题-解决问题-科学思考-得到最终结论.</td></tr>
</table>

	类比得到二元函数连续性的定义？	
	2. 回顾一元函数连续定义	通过复习回顾一元函数连续性的定义引出生活中很多事物的变化都是连续的，像植物的生长、气温的变化、知识的积累等，不能急于求成，必须遵循它原本的规律。渊博的知识是需要时间和持久不懈地努力的积累，妄图寻求捷径的想法只能事与愿违。
	3. 回顾二元函数极限的定义	通过复习回顾二元函数极限的概念，让学生领会极限蕴含的人生哲理：不忘初心（极限目标），砥砺前行，无限接近。举例说明中国梦的实现，全民抗击疫情，都需要每个人共同参与，才能夺取胜利。引申出齐心协力方能实现共同理想。
	4. 二元函数连续性的定义	通过学习二元函数连续性的定义引申出生活就是连续函数，只有不断付出努力的过往，才能收获今日的成功，引发共鸣，使学生的思想得以升华。与一元函数比较，由多元函数连续性的复杂性，培养学生不畏艰难，刻苦求知的探索精神。
	5. 有界闭域上连续函数的性质	由闭区间上一元连续函数性质很容易推广得到有界闭域上多元连续函数的性质，告诉我们知识之间的连续性，互通性。介值定理告诉我们在生活中，人与人之间只要彼此包容，心灵相通（连续），总能找到解决问题的关键点（平衡点），这一点符合社会主义核心价值观—和谐、友善：依道而和，包容等。
教学过程		
	内容	**时间**
一、引入与回顾	**前言引入：** 类比一元函数连续的定义，以及上一节所学二元函数的	10 分钟

重极限，探究二元函数连续性的定义，说说与一元函数连续的区别，有哪些新的内涵？

回顾 1：上册中一元函数连续的定义

定义 1. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

注： 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续必须具备下列条件：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 有定义，即 $f(x_0)$ 存在；

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

为了引入函数 $f(x)$ 点 x_0 连续的另一种表述，若记

$$\Delta x=x-x_0,\quad \Delta y=f(x)-f(x_0)$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 可等价的叙述为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，于是函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的定义又可以叙述为

定义 2. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

回顾 2：二元函数极限的定义：

设 f 为定义在 $D\subset R^2$ 上的二元函数，P_0 是 D 的一个聚点，A 是一个确定的实数.若对

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 使得当 $P\in U^{\circ}(P_0;\delta)\cap D$ 时，恒有

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

	则称**函数** f **在** D **上当** $P \to P_0$ **时，以** A **为极限**，记作 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$. 当 P, P_0 分别用坐标 (x,y), (x_0,y_0) 表示时，上式也常写作二元函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$. 注：二元函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$ 是两个自变量 x 与 y 分别独立地**以任意方式无限趋于** x_0 与 y_0，这样的极限称为**重极限**. **【德育元素】** 1. **通过复习回顾，函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的定义有两种形式，一种是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，刻画的是动态和静态的对立统一。另一种形式是，$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$，体现的则是一种相对的稳定性，当自变量变化很小的时候，因变量的变化也很小。** 2. **生活中很多事物的变化都是连续的，像植物的生长、气温的变化、知识的积累等，不能急于求成，必须遵循它原本的规律。渊博的知识是需要时间和持久不懈地努力的积累，妄图寻求捷径的想法只能事与愿违。函数的连续性印证了这一道理。** 3. **通过复习二元函数极限的概念，并强调必须点沿不同路径趋近时，函数都趋近于某一确定值才有极限，再次让学生领会极限蕴含的人生哲理：不忘初心(极限目标)，砥砺前行，无限接近。引申出齐心协力方能实现共同理想。例如中国梦的实现，全民抗击疫情，都需要每个人共同参与，才能夺取胜利。**	

二、二元函数连续性的定义	根据上述一元函数连续定义的回顾，以及二元函数极限的定义，我们可以推广得到二元函数连续性的定义. **定义** 设函数 $f(P)$ 在区域 $D\subset R^2$ 有定义，且 $P_0\in D$（它或者是 D 的聚点，或者是 D 的孤立点）.对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 只要 $\mathrm{P}\in \mathrm{U}(\mathrm{P}_0,\delta)\bigcap D$，就有 $\left\|f(P)-f(P_0)\right\|<\varepsilon$， (1) 则称 f **关于集合 D 在点 P_0 连续**. 在不致误解的情况下，也称 f **在点 P_0 连续**. 若 f 在 D 上任何点都关于集合 D 连续，则称 f 为 D 上的**连续函数**. 由上述定义知道： (1) 若 P_0 是 D 的孤立点，则 P_0 必定 f 是关于 D 的连续点； (2) 若 P_0 是 D 的聚点，则关于 D 在 P_0 连续等价于 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$. (2) 如果 P_0 是 D 的聚点，而(2)式不成立（其含义与一元函数的对应情形相同），则称 P_0 是 D 的**不连续点**（或称**间断点**）.特别当(2)式左边极限存在但不等于 $f(P_0)$ 时，P_0 是 f 的**可去间断点**. 如上节例 1、2 给出的函数在原点连续；例 4 给出的函	20 分钟

数在原点不连续，又若把例 3 的函数改为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\in\{(x,y)|y=mx,x\neq0\},\\ \dfrac{m}{1+m^2},(x,y)=(0,0),\end{cases}$$

其中 m 为固定实数，亦即函数 f 只定义在直线 $y=mx$ 上.这时由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\frac{m}{1+m^2}=f(0,0),$$

因此 f 在原点沿着直线 $y=mx$ 是连续的.

设 $P(x,y),P_0(x_0,y_0)\in D,\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0,$ 则称

$$\Delta z=\Delta f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

$$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

为函数 f 在 P_0 的**全增量**.和一元函数一样，可用增量形式来描述连续性，即当

$$\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D}}\Delta z=0$$

时，f 在点 P_0 连续.

如果在全增量中取 $\Delta x=0$ 或 $\Delta y=0$, 则相应的函数增量称为**偏增量**，记作

$$\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

$$\Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0).$$

一般说来，函数的全增量并不等于相应的两个偏增量之和.

若一个偏增量的极限为零，例如 $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x f(x_0, y_0) = 0$，它表示在 f 的两个自变量中，当固定 $y = y_0$ 时，$f(x, y_0)$ 作为 x 的一元函数在 x_0 连续.同理，若 $\lim_{\Delta y \to 0} \Delta_y f(x_0, y_0) = 0$，则表示 $f(x_0, y)$ 在 y_0 连续. 容易证明：当 f 在其定义域的内点 (x_0, y_0) 连续时，$f(x, y_0)$ 在 x_0 和 $f(x_0, y)$ 在 y_0 都连续.但是反过来，二元函数对单个自变量都连续并不能保证该函数的连续性（除非再增加条件）.例如二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, xy \neq 0, \\ 0, xy = 0 \end{cases}$$

在原点处显然不连续.但由于

$$f(0, y) = f(x, 0) = 0,$$

因此在原点处 f 对 x 和对 y 分别都连续.

若二元函数在某一点连续，则与一元函数一样，可以证明它在这一点近旁具有局部有界性、局部保号性以及相应的有理运算的各个法则.

下面证明二元复合函数的连续性定理.

定理 16.7（复合函数的连续性） 若函数 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 在 xy 平面上点 $p_0(x_0, y_0)$ 的某邻

域内有定义，并在点 p_0 处连续，函数 $f(u,v)$ 在 uv 平面上点 $Q_0(u_0,v_0)$ 的某邻域内有定义，并在点 Q_0 处连续，其中 $u_0=\varphi(x_0,y_0),v_0=\psi(x_0,y_0)$，则复合函数 $g(x,y)=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 也连续.

证： 由函数 $f(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 处连续可知，$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,$ 当 $|u-u_0|<\eta,|v-v_0|<\eta$ 时，有

$$|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon$$

又由函数 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 在点 $p_0(x_0,y_0)$ 处连续可知，对上述正数 $\eta,\exists\delta>0,$ 当 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时，都有

$$|u-u_0|=|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|<\eta,$$

$$|v-v_0|=|\psi(x,y)-\psi(x_0,y_0)|<\eta.$$

于是，当 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时，有

$$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|=|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon$$

即复合函数 $f[\varphi(x,y),\varphi(x,y)]$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

【德育元素】

1. **通过一元函数连续性的定义推广得到二元函数连续性的定义，这种类比的学习方法让学生保持对知识的好奇，由好奇心引领学习，从而能够培养起学习数学的兴趣，进一步培养学生的创新思维。**

<table>
<tr><td></td><td>

2. **通过介绍二元函数连续性的概念，引申出生活就是连续函数，只有不断付出努力的过往，才能收获今日的成功，引发共鸣，使学生的思想得以升华。**

3. **通过多元函数与一元函数连续性的类比学习，展示问题考虑全面性，多元函数的复杂性，培养学生不畏艰难，刻苦求知的探索精神。**

</td><td></td></tr>
<tr><td>三、有界闭域上连续函数的性质</td><td>

本段讨论有界闭域上多元连续函数的性质.它们可以看作是闭区间上一元连续函数性质的推广.

定理 16.8（有界性与最大、最小值定理）若函数 f 在有界闭区域 $D \subset R^2$ 连续，则函数 f 在 D 有界，且能取得最大值与最小值.

证：先证明 f 在 D 上有界. 倘若不然，则对每个正整数 n，必存在点 $P_n \in D$，使得

$$\left|f\left(P_n\right)\right| > n, n = 1, 2, \cdots. \quad (3)$$

于是得到一个有界点列 $\{P_n\} \subset D$，且总能使 $\{P_n\}$ 中有无穷多个不同的点.由 § 1 定理 16.3（聚点定理）的推论，$\{P_n\}$ 存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k} = P_0$.且因 D 是闭域，从而 $P_0 \in D$.

由于 f 在 D 上连续，当然在点 P_0 也连续，因此有

$$\lim_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = f(P_0).$$

</td><td>15 分钟</td></tr>
</table>

这与不等式(3)相矛盾.所以 f 是 D 上的有界函数.

下面证明 f 在 D 能取得最大值与最小值. 为此设

$$m=\inf f(D),\quad M=\sup f(D).$$

可证必有一点 $Q\in D$，使 $f(Q)=M$ （同理可证存在 $Q'\in D$，使 $f(Q')=m$ ）.如若不然，对任意 $P\in D$，都有 $M-f(P)>0$.考察 D 上的连续正值函数

$$F(P)=\frac{1}{M-f(P)}\quad ,$$

由前面的证明知道，F 在 D 上有界. 又因 f 不能在 D 上达到上确界 M ，所以存在收敛点列 $\{P_n\}\subset D$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}F(P_n)=+\infty$，这导致与 F 在 D 上有界的结论相矛盾. 从而证得 f 在 D 能取得最大值.

定理 16.9（一致连续性定理） 若函数 f 在有界闭区域 $D\subset R^2$ 连续，则函数 f 在 D 上一致连续. 即对 $\forall\varepsilon>0$，总存在只依赖于 ε 的正数 δ，使得对一切点 P、Q，只要 $\rho(P,Q)<\delta$，就有 $|f(P)-f(Q)|<\varepsilon$.

证：本定理可参照第七章中证明一致连续性定理的办法，运用有限覆盖定理来证明，也可以运用聚点定理来证明.这里我们采用后一种证法.

倘若 f 在 D 上连续而不一致连续，则存在某 $\varepsilon_0>0$，对于

任意小的$\delta>0$,例如$\delta=\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$，总有相应的$P_n$、$Q_n\in D$，虽然$\rho\left(P_n,Q_n\right)<\frac{1}{n}$，但是$\left|f(P_n)-f(Q_n)\right|\geq\varepsilon_0$.

由于D为有界闭区域，因此存在收敛子列$\left\{P_{n_k}\right\}\subset\left\{P_n\right\}$，并设$\lim\limits_{k\to\infty}P_{n_k}=P_0\in D$.为方便起见，再在$\left\{Q_n\right\}$中取出与$P_{n_k}$下标相同的子列$\left\{Q_{n_k}\right\}$，则因

$0\leq\rho\left(P_{n_k},Q_{n_k}\right)<\frac{1}{n_k}\to 0,k\to\infty$，

而又$\lim\limits_{k\to\infty}Q_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}P_{n_k}=P_0$.最后，由$f$在$P_0$连续，得到

$$\lim_{k\to\infty}\left|f(P_{n_k})-f(Q_{n_k})\right|=\left|f(P_0)-f(P_0)\right|=0.$$

这与$\left|f(P_{n_k})-f(Q_{n_k})\right|\geq\varepsilon_0>0$相矛盾，所以$f$在$D$上一致连续.

定理 16.10（介值性定理） 设函数f在区域$D\subset R^2$上连续，且P_1与P_2为D上任意两点，且$f\left(P_1\right)<f(P_2)$,则对任何满足不等式 $f\left(P_1\right)<\mu<f(P_2)$,

的实数μ，必存在点$P_0\in D$，使得$f\left(P_0\right)=\mu$.

证：作辅助函数 $F(P)=f\left(P\right)-\mu,P\in D$.

易见F仍在D上连续，且由不等式(4)知道$F(P_1)<0,F(P_2)<0$.这里不妨设P_1与P_2为D的内点.下面证明必存在$P_0\in D$，使得$F\left(P_0\right)=0$.

	由于D为区域，我们可以用有限段都在D中的折线连结P_1与P_2. 若有某一个连结点所对应的函数值为0，则定理已得证.否则从一端开始逐个检查直线段，必定存在某直线段，F在它两端的函数值异号，不失一般性，设连结$P_1(x_1,y_1)$与$P_2(x_2,y_2)$的直线段含于D，其方程为 $$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1),\\ y=y_1+t(y_2-y_1),\end{cases}\quad 0\le t\le 1.$$ 在此直线段上，F表示为关于t的复合函数 $$G(t)=F\left(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1)\right),0\le t\le 1.$$ 它是$[0,1]$上的一元连续函数，且$F(P_1)=G(0)<0<G(1)=F(P_2)$.由一元函数根的存在定理，在$(0,1)$内存在一点$t_0$，使得$G(t_0)=0$.记 $$x_0=x_1+t_0(x_2-x_1),y_0=y_1+t_0(y_2-y_1),$$ 则有$P_0(x_0,y_0)\in D$，使得 $$F(P_0)=G(t_0)=0\text{即}f(P_0)=\mu.$$ 实际上，定理 16.8 与 16.9 中的有界闭域D可以改为有界闭集（证明过程无原则性变化）.但是，介值性定理中所考察的点集D只能假设是一区域，这是为了保证它具有连通性，而一般的开集或闭集不一定具有这一特性.此外，由定理 16.10 可知，若f为区域D上连续函数，则$f(D)$必定是一个区间（有限或无限）.	

	【德育元素】 **有界闭域上多元连续函数的性质，可以看作是闭区间上一元连续函数性质的推广．这种一元到多元的推广告诉我们知识之间的连续性，互通性。介值定理告诉我们在生活中，即使最知己的人，有时候看待某些事物的观点也是完全对立的，只要彼此心是相通（连续）的，总能找到解决问题的关键点（平衡点），切入社会主义核心价值观—和谐、友善：依道而和，包容等。**	
四、课后作业与内容小结	**课后作业：** 1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，试讨论函数在点 $(0,0)$ 处是否连续。 2. 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy},(x,y)\in D=[0,1)\times[0,1)$，证明：$f$ 在 D 上连续，但不一致连续。 3. $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 证明：$f(x,y)$ 在原点连续。 **内容小结：** 1. 二元函数连续性的定义； 2. 二元复合函数连续性的定理； 3. 有界闭域上连续函数的性质。	5 分钟
教学总结	本节课主要学习了二元函数的连续性定义与有界闭域上连续函数的性质，教学设计第一步上课前一天发布任务，复习一元函数极限与连续的知识第二步，上课开始	

	10 分钟，提问复习：①一元函数连续的定义。②多元函数极限的概念。重点强调二元函数极限必须点沿不同路径趋近时，函数都趋近于某一确定值极限才存在，由此引申齐心协力方能实现共同理想。例如中国梦的实现，全民抗击疫情，都需要每个人共同参与，才能夺取胜利。第三步重点介绍二元函数连续的概念，根据实例引申出生活就是连续函数，只有不断付出努力的过往，才能收获今日的成功，引发共鸣，使学生的思想得以升华。第四步介绍有界闭域上连续函数的性质，最后布置课后作业并做内容小结。通过教学设计使学生对知识点理解更深刻，使课堂思政教学变得水到渠成。课堂思政内容并没有过多占据原本紧张的教学课时，反而使教学更生动丰满。	

《水域生态学》线上教学思政的思考

农学院 房燕

为有效防控疫情，最大程度保障学生们的安全，学校于本周启动了线上教学。2020年春天，我经历了一次线上教学，再次线上教学，硬件可以以最快的速度准备完善，教学质量持续改进仍是最重要的任务。考虑到这次与上次的学情不同，最大的不同是学生在校内学习，如何让他们能够心态平和学习专业课知识，是我作为任课教师应该思考的问题。而课程思政的探讨和实施，可以让讲授和接受有机衔接。在《水域生态学》的课堂上，我思考采取以下途径通过课程思政提升教学质量：

1. 严格自身要求，以身示范

提前充分备课，调整好状态，上课之前至少提前10分钟通过课程qq群发课堂链接，课程开始之前完成考勤，按时上课下课，严格执行教师规范。授课过程保持好积极、轻松的状态，管理好课堂秩序，注意掌控学生的反馈，随时调整授课方法。

2. 挖掘思政元素，润物无声

对水域生态学知识体系进行外延和拓展，结合学情需要挖掘思政点。在讲授生物圈的形成是生物与环境协同进化的结果时，让学生先自学本部分知识，然后学生以自身的体会讲讲对该知识点的理解。最后基于学生讲述，我在梳理知识点的同时，将人际关系的协同进步传递给学生。只有学习、生活、工作中，协同进步，爱情才更长久，友情亦更深厚。目前的学校的防疫政策，给学生提供了最为安全的保障。大家理解遵守政策，校园也才更加安全。学生的遵守，学校的安全也是协同进步的。

3. 激发爱渔情怀，信念坚定

学生掌握了生态学知识，但由于对渔业不甚了解，很难感受到学有所用。知识和实践之间的桥梁需要教师搭建，教师要帮助学生将论文写在祖国的江河湖海。讲到生态系统失衡，给同学们播放了今年胶州湾贝类养殖区海星爆发的视频，是什么让可爱的海星不再可爱？还有2021年底开始的荣成海带受灾的视频，是什么让荣成养殖区八成以上的海带遭受病害？我们还共同观看了国家藻类产业技术体系专家针对本次海带受灾的一线调查和建议。知道了海水中营养盐的缺乏是造成本次灾害的主要原因之一，也明白了海带新品种在本次病害过程中表现出的优秀抗病力，更感受到了行业专家的担当和奉献。这些知识恰恰都是我们水域生态学的学习内容，为所学找到出口，结合行业专家对产业的针对性指导，激发同学们为渔业渔民渔村振兴服务的热情，强渔有我的信念在心

中升腾。

课程思政，道长任坚，吾将博学之，慎思之，笃行之，行且将至。