教学简报

2022 年　第 5 期

总第 431 期

鲁东大学教务处　　　　　　　　二〇二二年三月十七日

鲁东大学
课程思政教学典型案例专辑

（二十六）

教务处教学创新与研究科

目　　录

《微分的概念》课程思政教学设计

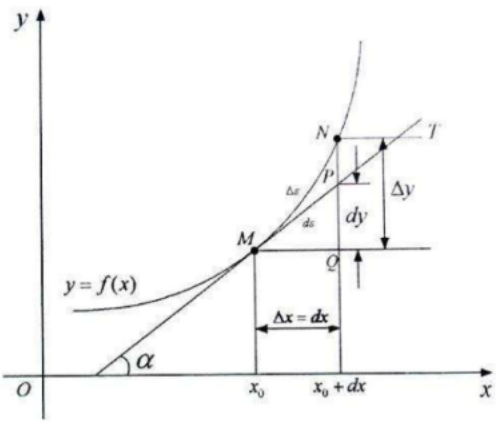
数学与统计科学学院 王秀红

课程思政建设团队：王秀红 樊永红 宋美 崔少燕 张丽娟 包贵 高荣

授课题目	微分	**所属课程**	数学分析 1
授课对象	数学与应用数学本科生	**授课时长**	50 分钟
教学背景	微分概念是数学分析中的核心概念之一。早在十七世纪牛顿和莱布尼茨分别从研究物体运动的速度和曲线求切线两个问题提出导数概念的思想，到了十八世纪，经过柯西、魏尔斯特拉斯等科学家对极限概念的精确化的工作，产生了导数和微分的精确定义。 本节课主要在掌握了导数概念的基础上讲授一元函数微分的定义以及几何意义，微分与导数的关系以及微分运算和应用。		
教学目标	**知识目标:** (1) 掌握微分的概念、微分思想; (2) 掌握微分和导数的关系; (3) 掌握微分的运算和应用. **能力目标:** (1) 培养学生从实际问题中抽象出数学实质的能力; (2) 理解微分概念所表达的数学思想. **德育目标:** （1）理解微分概念的本质是对世界万物微小变化程度的度量，以便根据变化程度做出决策。 （2）通过微分概念体现的“以直代曲”的思想，掌握“直与曲”这对矛盾的对立统一性。 （3）微分概念的精髓告诉我们；干成任何一件事必须从局部做起，以微分的态度学习和工作。 （4）通过解决实际问题，让学生养成应用知识的能力。		
重点与难点	**重点:** 微分概念的理解; **难点:** 微分概念的应用。		

<table>
<tr><td>教学手段与方法</td><td>授课教师黑板授课为主，多媒体授课为辅；
直观演示、问题驱动，鼓励学生主动思考并解决问题。</td></tr>
<tr><td colspan="2">教学过程</td></tr>
<tr><td>授课环节</td><td>具体内容</td></tr>
<tr><td>一、微分概念的引入</td><td>引入：从导数到微分
和导数概念紧密关联的是微分的概念。从导数一节我们知道，为解决“变化率”问题，催化了导数概念的诞生。那么又是什么样的问题，导致了微分概念的产生呢？
在很多具体问题中，我们往往需要计算函数的改变量。
例 1 设一边长为 x 的正方形金属薄片，它的面积为 $S(x)=x^2$ 是 x 的函数，受温度影响，其边长由 x_0 增加 Δx，问薄片的面积的改变了多少？
解：$\Delta S=(x_0+\Delta x)^2-x_0{}^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$
分析：这里的函数简单，所以求解容易。
例 2 我们知道 ：$\sin 30^0=\dfrac{1}{2}$，那如何求得 $\sin 33^0$ 的值呢？
即已知：$y=f(x)=\sin x$，$x_0=\dfrac{\pi}{6}$，$\Delta x=\dfrac{\pi}{60}$，$f(x_0)=\dfrac{1}{2}$
求 $f(x_0+\Delta x)$。
分析：$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\dfrac{2x_0+\Delta x}{2}$，不容易求出。
以上两个例子都是研究函数改变量的问题，也就说已知函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的函数值为 $f(x_0)$，给 x_0 一个增量 Δx，函数值由原来的 $f(x_0)$ 变为 $f(x_0+\Delta x)$，那么函数改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，一般来说如果 $y=f(x)$ 是一条曲线，这个增量不容易求，但是直线函数 $y=Ax+b$ 的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x$ 是容易求出，且为自变量增量的线性函数。那么能不能用直线增量近似代替曲线增量呢？用 $A\Delta x$ 近似代替曲线增量 Δy，误差要求当 Δx 很小的</td></tr>
</table>

	时候，$\Delta y - A\Delta x$ 比 Δx 还要小，也就是 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x}=0$，等价于 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$。 如果函数改变量能写成这样的两部分和，第一部分是自变量的线性函数，第二部分是个高阶无穷小。此时称函数是可微分的。$A\Delta x$ 称为微分。微分就是函数改变量的主要部分。微分的概念就是在解决曲与直的矛盾中产生的。 【思政点】 （1）以实际问题引入课题，培养学生从实际问题中抽象出数学思想方法的能力，进而提升学生用数学思想方法解决问题的初步能力。 （2）“曲和直”是一对矛盾的统一体。唯物辩证法认为：矛盾的双方具有同一性、联系性和对立性。在初等数学中，用静止的观点看问题，直线与曲线完全不能相互表现，更不能相互取代，如果用运动的观点看问题，也就是在高等数学用了极限的观点，直线与曲线可以相互表现。
二、微分的定义	微分的定义：设 $y=f(x)$ 在 x_0 点某个邻域内有定义。给 x_0 一个增量 Δx，那么相应的得到函数的增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果存在一个常数 A，使得 Δy 能够表示成 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$　（1） 则称 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微（分），其中 $A\Delta x$ 称为 $y=f(x)$ 在 x_0 点的微分。 记作：$dy\|_{x=x_0} = A\Delta x$ 或者 $df(x)\|_{x=x_0} = A\Delta x$ 当 $A \neq 0$，微分 $dy\|_{x=x_0} = A\Delta x$ 是函数增量 Δy 的线性主部。 由微分定义可知，例 1 中　面积函数 $S(x)=x^2$ 在 x_0 点可微分，且 $ds(x)\|_{x=x_0} = 2x_0\Delta x$。 【思政点】微分概念的精髓就是“局部线性化”，这与哲学中让事物保持简单的“奥卡姆剃刀法则”一脉相承：舍去次要的部分，抓住事物的本质。在我们日常的学习生活中，也要注意抓住主要的部分，懂得舍取。

三、可微与可导的关系	定理：$y=f(x)$ 在 x_0 点可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导，且（1）中的 A 等于 $f'(x_0)$ 证明：必要性：若 $y=f(x)$ 在 x_0 点可微，则由（1）有 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$ $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$$。 充分性：若 $y=f(x)$ 在 x_0 点可导，即 $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\alpha\to 0)(\Delta x\to 0)$$ 所以有 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x(\alpha\to 0)=A\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$。 得到微分的一般表达式：$dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$。 因此，导数 $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ 也叫微商。 例如： $d(\sin x)=\cos xdx$ $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$ 只需要计算出导函数就能得到微分。 由导数的计算法则相应的得到微分的运算法则，同学们可自行完成。
四、微分的几何解释	 由上图可见：当自变量由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$，函数增量

	$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=NQ$，而微分则是曲线在点$M$处的切线上与$\Delta x$所对应的增量$dy=f'(x_0)\Delta x=PQ$，并且$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}=0$ 即为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{NP}{MQ}=f'(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{NP}{PQ}=0$ 当$f'(x_0)\neq 0$，有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{NP}{PQ}=0$。 这表明当$x\to x_0$时候，线段$NP$的长度要比$PQ$的长度小得多。 所以微分思想“以直代曲”，是使用的曲线切线增量代替曲线增量。 **【思政点】**微分思想“以直代曲”，启发我们在遇到难以解决的问题时，我们要想办法找到一个和这个问题贴切的容易解决的问题去解决。善于抓住主要矛盾。
五、微分的应用	由微分的定义以及几何意义，可以得到下面的近似计算公式: $\Delta y\approx dy$（Δx很小） 得到 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ （2） 或者: $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ （$x-x_0$很小）（3） 注意到曲线在点$(x_0,f(x_0))$的切线方程为$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$。 （3）式的几何意义就是当$x-x_0$很小的时候，可用切线近似替代曲线. 利用这种“局部线性化”的思想可以对复杂的问题进行简化处理，这就可以用来做近似计算求函数值。 一般地，为了求出$f(x)$的近似值，可以找出邻近于x的点x_0，只要$f(x_0)$、$f'(x_0)$易于计算，利用（3）可求得$f(x)$的近似值。 例如本节课开头的例1，已知：$f(x)=\sin x$，取$x_0=\frac{\pi}{6}$，$\Delta x=\frac{\pi}{60}$，则 $\sin 33^0=f(x_0+\Delta x)$。利用公（2）：

	$f\left(x_0+\Delta x\right) \approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{60}\approx 0.545$。 【思政点】(1)“局部线性化”思想启迪我们，人都是生活在与他人联系的社会中，我们考虑任何问题都不能孤立的仅仅考虑单独的一个人或者一件事，要和周边的状况结合考虑；复杂的问题可以简化处理。 (2)我们对待学习也要微分的态度，细微到一个小的范围内思考问题，尽职尽责，热爱学习，达到成功的彼岸。 (3)微分概念的精髓告诉我们要干成一件大事，必须从局部、从小事做起，“勿以善小而不为，勿以恶小而为之”就是这个道理。
六、教学总结	本节课在提出如何计算函数改变量的问题中，引导学生分析问题，逐步导出微分这一重要概念。通过本节课学习，学生了解了微分的概念和思想；微分和导数的区分和联系；微分的计算和应用。在教学过程中，注意到课程内容和思政内容的有机渗透。初步体会微分思想中“曲与直”这对矛盾的对立统一性。

《海岸工程水文》课程思政的挖掘与探索

水利工程学院 石洪源

课程思政教学改革是全面贯彻落实全国高校思想政治工作会议精神，落实习近平总书记“使各类课程与思想政治理论课同向同行，形成协同效应”要求的重要途径。课程思政的实质是在教授专业知识的同时，将理想信念、价值理念和道德观念的引导作为重要教学内容，并在专业课教学过程中落实，进而与思政课程一道形成大思政、大德育格局，实现立德树人、润物无声。基于此，高校教师应主动承担课程思政教学改革的重要职责。在专业课程教学改革中，必须根据各专业课程的特点，深入挖掘专业课程的思政元素，并进行细致梳理，在专业课程教学中融入思政元素。

当前，课程思政已经成为教育界的热点研究问题，围绕着课程思政的内容设计、方式方法、规范化和效果评价等开展了广泛的研讨。海岸工程水文学是高等学校港口航道与海岸工程专业主要专业技术课之一，也是一门理论性和实践性都很强的专业必修课。本课程的任务是使学生掌握海岸工程水文学的基本知识、基本概念、基本理论及基本水文要素的观测和计算等，了解水文要素的特点以及其在工程设计、建设和运营过程中的特点及作用，掌握水文要素计算的基本原理和方法，培养学生具有一定水文要素计算能力。它不仅关注水体运动变化的自然规律，更注重与地理环境、人类社会之间的相互关系。海岸工程水文具有宏观性、综合性及区域性等特点，在专业课程体系中具有广泛的代表性，但当前针对该课程的思政教学设计和实践案例还比较缺乏。本文以海岸工程水文为例，对课程思政的教学设计和实践进行初步的探讨，从而为其他港口航道与海岸工程专业课程思政建设与实践提供参考。

一、《海岸工程水文》课程思政的必要性

工程水文学作为地球科学的一个组成部分，在人类认识自然、改造自然的过程中具有重要意义和广阔前途. 人类社会依水而兴，随着中华民族的繁衍生息，逐步认识水、开发水、利用水、治理水、保护水和鉴赏水，形成了内涵丰富的传统水文化。“水能载舟、亦能覆舟”“上善若水”、“堵不如疏”，水文学知识本身内化了丰富的传统水文化精神，海岸工程水文教学过程中融入课程思政，符合其本身“自然与人文”、“自然与工程”多重属性的特点需求，对于弘扬中华传统文化、增强民族认同感具有十分重要的意义。

同时，随着科学技术的进步，海岸工程水文相关的理论和技术不断进步，一方面，人类通过修建各种水利工程实现多元化的水资源利用；另一方面，生态环境保持与人类

开发利用无序的矛盾越来越剧烈。中国是一个地域辽阔、经济高速发展的大国，其自然条件时空多样、社会发展迅速，在海岸工程水文教学中引入课程思政，有利于学生正确认识工程、自然和人类发展的关系，树立人与自然和谐相处、工程与自然相互促进的发展观，这也符合工程质量认证对人才培养的标准和初衷。

二、《海岸工程水文》课程思政的实施路径

为了将课程思政有效地融入到专业课程教学中，需要对课程思政的实施路径进行顶层设计，从教学目标规划、内容安排、材料准备以及方式设计等多方面进行多层级的统筹规划。教学目标是通过教学使学生达成某种成果的期望，做好课程思政，在分析专业特点基础上，规划设置课程思政目标。根据专业特点，海岸工程水文课程设置了弘扬中华传统文化，践行社会主义核心价值观，增强社会责任感，培育人与自然和谐共生和工程与自然互相促进的理念 4 个思政目标。在合理规划课程思政目标的基础上，深挖专业知识中蕴含的思政元素，将思政内容安排在合适的教学章节，避免生搬硬套. 由于目前专业教材中对课程思政的体现普遍较少，为弥补专业教材中思政材料的缺失，需要以书本内容为骨架，以典型案例、代表性人物和时事热点为载体，广泛采用多媒体影像和经典文献等多种辅助材料，搭建起专业知识和价值引导之间的桥梁，使思政教育更加丰满和立体。在教学方式设计上，应以学生为主导，采用辩论讨论和实践教学为主、教师讲授为辅的方式开展思政教学，调动学生的积极性，引发学生的思考。

三、《海岸工程水文》课程思政的主要内容

水文学的课程思政应当以“自然融入”“有机结合”为原则，充分围绕教学内容展开. 根据课程思政的实施路径，结合部分章节中的教学内容，分别说明如何将中华传统文化、社会主义核心价值观、社会责任感、人与自然和谐共生和工程与自然互相促进理念的思政目标与教学内容相融合。

（一）中华传统文化的思政融入

中华文明发源于长江和黄河，在争取生存和改善生活的实践中，逐渐形成了丰富的物质财富和精神财富。工程水文学课程开篇讲授工程水文学的发展历史，介绍了我国工程水文科学的发展阶段、代表性人物和重要水利工程，例如大禹治水、三峡工程、港珠澳大桥等；在技术层面上，我国古代的水利建设技术是领先世界的，体现了中华民族集体智慧. 如：始建于战国时期的都江堰水利工程，直到今天仍然在造福成都平原，其科学的设计理念和治水实践，创造了人与自然和谐共生的典范，习近平总书记评价其为“因势利导建设的大型生态水利工程，不仅造福当时，而且泽被后世”。通过工程水文学发

展史的介绍，有利于学生了解中华文明历史和中华民族精神，增强文化认同感和民族自信心，培养学生的爱国主义情怀。

图 1 课程中引入各种工程实例

（二） 社会主义核心价值观的思政融入

党的十八大报告提出，要大力加强社会主义核心价值体系建设，“倡导富强、民主、文明、和谐，倡导自由、平等、公正、法治，倡导爱国、敬业、诚信、友善，积极培育和践行社会主义核心价值观”。在授课中，通过实例介绍、人物宣讲等手段，弘扬社会主义核心价值观，构筑中国精神、中国价值和中国力量。例如在“河流基本知识”这一章节的讲解中，介绍河流的概念、特征和基本因素。在此基础上，以 2021 年河南特大洪水为例，引入军民万众一心、团结奋战的先进事迹。通过鲜活的案例，学生们对洪水的发生发展过程有了更直观的体会，也使的坚韧不拔的抗洪精神深入人心，同时也让学生对工程水文学的重要性有了更深层次的认识；在讲授山洪和平原河流的特点时，引入面临暴雨侵袭山洪暴发，台风刚过江水汹涌的险境，浙江民警周锦勇、李安主动替换下准备下水救援的队员，奋不顾身冲在抢险救援第一线，不幸付出了年轻的生命的案例，引导学生把握社会主义核心价值观的精神实质，勇于担当、甘于奉献，为中华民族伟大复兴谱写光荣赞歌。

（三）社会责任感的思政融入

水资源作为基础性的自然资源和战略性的经济资源，对区域发展和国家稳定具有极其重要的意义。在第一章绪论中，加入我国人均水资源量占有量相关内容，并指出，改

革开放以来，随着工业化和城市化进程，我国水资源短缺问题逐渐凸显，在一些北方缺水地区水资源供需矛盾十分突出，水危机已成为严重制约国家生态文明建设和社会经济可持续发展的瓶颈，因此才有了南水北调工程的出现，以此培养学生形成节约用水、保护水资源的社会责任感，促进全民节水。

图 2 课程中引入水资源利用中产生的社会问题

（四）人与自然和谐共生和工程与自然互相促进理念的思政融入

人类与地球的关系研究是工程类学科研究的核心议题，水文学教育既是人类认识自然环境的重要途径，也是树立人与自然和谐共生理念的重要基础。过去几十年，我国经济高速增长，但水利工程造成的生态环境破坏、水资源污染等问题使得人地关系成为新时代绿色发展必须面对和探讨的议题。在讲授“人类活动的影响”小节中，通过组织学生开展分组讨论，例如滨海核电工程、跨海大桥以及三峡大坝等水利工程，分析水利工程和城市化等不同人类活动的水文效应，引导学生理解人与自然和谐共生的深远意义，践行“绿水青山就是金山银山”的理念。

四、结论

“课程思政”是高校育人的一项系统工程，是当代加强学生政治理论水平和德育教育的必经之路。教师要积极主动挖掘课程中思政元素，并不断在教学方法和手段上改革

创新，使学生主动接受课程思政教育。

ydrology

正在分享屏幕 00:54:38 6409港航……等85人正在观看

- 例题：某工程拟建断面水文站有35年的实测流量资料，试求最大流量的累积频率曲线及相应于设计标准P=1%和校核标准P=0.1%的最大流量值。

序号m	最大流量Q	模比系数Ki	Ki-1	$(Ki-1)^2$	经验累积频率P
1	18500	2.09	1.09	1.1881	2.8
2	17700	2.00	1.00	1.0000	5.6
3	13900	1.57	0.57	0.3249	8.3
4	13300	1.50	0.50	0.2500	11.1
…					
33	4240	0.48	-0.52	0.2704	91.7
34	3650	0.41	-0.59	0.3481	94.4
35	3220	0.36	-0.64	0.4096	97.2
总计	310010	35.00	0.00	6.0616	

海岸工程水文学

《泰勒公式》课程思政教学设计

数学与统计科学学院　宋美

数学分析课程负责人：王秀红

课程思政教学团队：宋美 崔少燕 张丽娟 史英英等

教学内容	泰勒公式	所属课程	数学分析 1
授课对象	数学与应用数学专业本科生	授课时长	50 分钟
教学背景	泰勒公式是一元函数微分学中的重要内容，集中体现了微积分“逼近法”的精髓，在近似计算上有独特的优势，在近似计算、理论分析以及物理、工程等许多实际问题中有着广泛应用，是研究函数极限和估计误差等方面不可或缺的数学工具，也是数学分析教学的重点和难点之一．泰勒公式形式特殊、内容抽象，对学生来说较难理解． 在此之前，学生学习了柯西中值定理以及柯西定理的应用——洛必达法则，会用洛必达法则求未定式极限，为泰勒公式的证明提供了方法；学生学习了函数的微分，会用直线近似表示函数，为本节课的内容打下了基础．		
教学目标	**知识目标：**深刻理解泰勒定理，掌握泰勒公式，能写出函数 $f(x)$ 在 x_0 处的带佩亚诺型余项的泰勒公式；掌握并熟记一些常用初等函数的麦克劳林展开公式，并能加以应用；会用间接法求函数的带佩亚诺型余项的泰勒公式；会用带佩亚诺型余项的泰勒公式求函数的极限等． **能力目标：**会用间接法求函数的带佩亚诺型余项的泰勒公式，并会求函数的高阶导数；会用带佩亚诺型余项的泰勒公式求函数的极限，并会判定求极限中，函数泰勒展开的阶数．体会“以曲代曲”的数学思想、化繁为简、以简驭繁的数学研究方法． **德育目标：**以学生为中心，以问题为导向，层层设疑，让学生带着问题去思考、去学习，了解几个公式的来龙去脉，培养学生的科学的探索精神．本节课的学习，学生能够理解泰勒公式的精髓是化繁为简，将复杂函数转化为简单的多项式函数，且误差大小可控．并能体会“以曲代曲”的数学思想、化繁为简、以简驭繁的数学研究方法．		
重难点分析	**重点：**“以曲代曲”的思想；函数 $f(x)$ 在 x_0 处的带佩亚诺型余项的泰勒公式；		

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">常用初等函数的泰勒展开公式;用带佩亚诺型余项的泰勒公式求某些函数的极限.
难点：泰勒公式的证明以及泰勒公式的应用.</td></tr>
<tr><td>**教学手段和教学方法**</td><td colspan="3">授课教师黑板教授为主，多媒体展示为辅.
采用引导启发式教学法，以问题为导向，教师的讲解与学生的探究相结合，着重揭示其中化繁为简、以简驭繁的数学思想，辅助学生的练习，帮助学生轻松掌握这一基础而重要的知识点，同时实时插入数学史，融入思政元素，充分调动学生主动性和思考问题的积极性.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">**思政理念**</td><td>**思政点**</td><td colspan="2">**解读方向**</td></tr>
<tr><td>1. 提出问题：如何用高次多项式逼近函数</td><td colspan="2">在《函数的微分》一节中，我们已经学习了“以直代曲”数学思想，但“以直代曲”有两个缺点：近似程度不高和没有具体的误差估计式. 那么,能不能用简单的曲线“以曲代曲”?生活不是只有直线，一条简单的曲线也能到达理想的彼岸.</td></tr>
<tr><td>2. 泰勒多项式</td><td colspan="2">学生从中体会方程的理想，了解泰勒多项式的来龙去脉.</td></tr>
<tr><td>3. 带佩亚诺型余项的泰勒公式.</td><td colspan="2">通过几个科学家对泰勒公式的不同贡献,揭示科学发展的曲折历程，帮助学生树立科学品质，培养探索精神和良好的科学精神；同时也说明一个人的力量是有限的，科学的发展与进步往往是科学家们共同努力的结果. 我们在学习生活中也要学会团队合作.</td></tr>
<tr><td>4. 泰勒公式的重要性.</td><td colspan="2">泰勒公式大大扩展了我们对可微函数的把握和使用. 公式表面上看似复杂，但它所面对的问题却是重要的实际问题，这就是如何用多项式来逼近函数. 其在微分学相关计算与证明中都有广泛的应用. 利用常见函数的泰勒公式，可以大大简化函数形式，还可以利用泰勒公式求极限等.</td></tr>
<tr><td colspan="4">**教学过程**</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">**内容**</td><td>**时间**</td></tr>
<tr><td>**一、引入**</td><td colspan="2">在解决问题的过程中，我们总希望能将复杂的问题简单化，对函数的研究也不例外.</td><td>5 分钟</td></tr>
</table>

不论在近似计算或理论分析中，我们希望能用一个简单的函数来近似一个比较复杂的函数，这将会带来很大的方便．一般来说，最简单的是多项式，因为多项式是关于变量加、减、乘的运算，但是，怎样从一个函数本身得出我们所需要的多项式呢？

前面讨论过“微分在近似计算中的应用”，我们知道，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则有有限增量公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

即在 x_0 附近，用一次多项式 $p_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 逼近函数 $f(x)$ 时，其误差为 $o(x-x_0)$．从几何上来看，就是在点 $(x_0,f(x_0))$ 处用切线近似代替曲线 $y=f(x)$，也就是所谓的“以直代曲”．从物理上讲，表示在 x_0 临近的时段内用匀速直线运动近似变速直线运动．

这是一个用一次多项式近似表达函数的例子，但是这种近似表达式还存在着不足之处：首先是精确度不高，这所产生的误差仅是关于 x 的高阶无穷小；其次是用它来作近似计算时，不能具体估算出误差大小．

问题：①能否用 x_0 高次多项式来近似表达函数，其误差是 $o((x-x_0)^n)$？

②能否给出具体的误差公式？

【德育元素】

泰勒公式主要是用多项式函数来逼近相对较复杂的函数，当遇到较难研究的函数时，可以用看似不够“精干”但相对来说比较“平易近人”且研究比较透彻的多项式函数来近似讨论．使学生领悟到生活中可借助已有的简单工具和方法来解决比较复杂问题的智慧，生活不是只有直线，一条路走不通时可以转弯，总能到达理想彼岸．

<table>
<tr>
<td>二、泰勒多项式</td>
<td>

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有直到 n 阶导数，问是否存在一个关于 $x-x_0$ 的 n 次多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达 $f(x)$，要求 $p_n(x)$ 与 $f(x)$ 之差是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小.

我们自然希望 $p_n(x)$ 与 $f(x)$ 在 x_0 的各阶导数（直到 n 阶导数）相等， 这样就有

$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$

$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$

$P_n''(x)=2a_2+3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$

$P_n'''(x)=3!a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0)+\cdots+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$

$$\cdots$$

$p_n^{(n)}(x)=n!a_n$

于是

$p_n(x_0)=a_0$， $p_n'(x_0)=a_1$， $p_n''(x_0)=2!a_2$， $p_n'''(x_0)=3!a_3$，

$\cdots$， $p_n^{(n)}(x_0)=n!a_n$.

按要求有

$f(x_0)=p_n(x_0)=a_0$， $f'(x_0)=p_n'(x_0)=a_1$ ，

$f''(x_0)=p_n''(x_0)=2a_2$， $f'''(x_0)=p_n'''(x_0)=3!a_3$，

$\cdots$， $f^{(n)}(x_0)=p_n^{(n)}(x_0)=n!a_n$

从而有

$a_0=f(x_0)$， $a_1=f'(x_0)$， $a_2=\dfrac{1}{2!}f''(x_0)$，

$a_3=\dfrac{1}{3!}f'''(x_0)$， $\cdots$， $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$.

即

</td>
<td>12 分钟</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

$$a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

于是就有

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**泰勒多项式**，$p_n(x)$ 的各项函数 $a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$（$k=1,2,\cdots,n$）称为**泰勒系数**.

【德育元素】

这一多项式是由18世纪早期英国牛顿学派最优秀代表人物——泰勒（Brook Taylor，1685-1731年）于1715年在他的主要著作《正和反的增量法》中给出，因此称之为 $f(x)$ 在 x_0 点处的 n 次泰勒多项式. 在求多项式系数的过程中，我们应用了方程的思想.

问题： 当用泰勒多项式逼近 $f(x)$ 时，其误差是不是

$$f(x)-p_n(x)=o((x-x_0)^n)\ ?$$

</td><td></td></tr>
<tr><td>

二、带佩亚诺型余项的泰勒公式

</td><td>

定理1 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在直至 n 阶导数，则有

$$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n),$$

即

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**泰勒公式**；$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ 称为**泰勒公式的余项**. 形如 $o((x-x_0)^n)$ 的余项称为**皮亚诺（Peano）型余项**.

证 因为

$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$

</td><td>30分钟</td></tr>
</table>

$$=f(x)-[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n]$$

且

$$R_n(x_0)=R_n{}'(x_0)=\cdots=R_n{}^{(n)}(x_0)=0,$$

连续使用罗比达法则$n-1$次，最后用导数的定义，即

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n{}^{(n-1)}(x)}{n(n-1)...2(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{R^{(n-1)}(x)-R^{(n-1)}(x_0)}{n!\cdot(x-x_0)}=\frac{R^{(n)}(x_0)}{n!}=0.$$

从而完成了证明．即若$f(x)$在点x_0处具有n阶导数，可以用$(x-x_0)$的n次多项式来近似表达函数，其误差是$o((x-x_0)^n)$．

注：1、 若$f(x)$在点x_0附近函数满足$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$，其中

$$p_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n,$$

这并不意味着$p_n(x)$必定是$f(x)$的泰勒多项式$T_n(x)$． 比如

$$f(x)=x^{n+1}D(x)=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots 0\cdot x^n+x^{n+1}D(x)$$

$$=p_n(x)+o(x^n)$$

其中$p_n(x)=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots 0\cdot x^n$，但$p_n(x)$并非$f(x)$的泰勒多项式$T_n(x)$． （因为除$f'(0)=0$外，$f(x)$在$x=0$处二阶及二阶以上的导数不存在）；

2、满足条件$f(x)=p_n(x)+o((x-x_0)^n)$的n次逼近多项式$p_n(x)$是唯一的．由此可知，当$f(x)$满足定理 1 的条件时，满足要求$f(x)=p_n(x)+o((x-x_0)^n)$的多项式$p_n(x)$一定是$f(x)$在x_0

点的泰勒多项式$T_n(x)$；

3、 泰勒公式中当x_0＝0时，

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

称为$f(x)$的麦克劳林（Maclauyin）公式.

泰勒（Taylor，1685-1731 年） 麦克劳林（**Maclaurin，1698-1746 年**）

【德育元素】

泰勒是 18 世纪早期英国牛顿学派最优秀的代表人物之一，主要著作是 1715 年出版的《正的和反的增量方法》. 泰勒真正闻名于世的就是他在微积分学中的将函数近似成多项式函数的定理，即泰勒定理. 然而，在半个世纪里，数学家们并没有认识到泰勒定理的重大价值，直到拉格朗日才真正地发现了它的价值所在. 拉格朗日认为这个定理是微积分的基本定理，并且给出了它的余项表达式. 而泰勒定理的严格证明是由一个世纪之后的柯西来完成的.

麦克劳林（1698–1746）——苏格兰数学家，著名物理学家、数学家牛顿的学生. 1742 年撰写的《流数论》以泰勒多项式作为基本工具，是对牛顿的流数法作出符合逻辑的、系统解释的第一本书. 他得到数学分析中著名的麦克劳林级数展开式，并用待

	定系数法给予证明. 通过几位数学家对泰勒定理研究的时间线介绍，数学家们经过200多年时间才真正的搞明白. 揭示科学发展的曲折历程，帮助学生树立科学品质，培养探索精神和良好的科学精神. **【德育元素】** 泰勒公式是一元微分学的顶峰. 泰勒公式大大扩展了我们对可微函数的把握和使用. 公式表面上看似复杂，但它所面对的问题却是重要的实际问题，这就是如何用多项式来逼近函数. 周家云等在《数学分析的方法》中有一段关于泰勒定理的评价，写得很出色： “我们不想把话说得太绝对，但至少可以说：凡是用一元微分学中的定理、技巧能解决的问题，其中的大部分都可以用泰勒定理来解决. 掌握了泰勒定理之后，回过头去看前面的那些理论，似乎一切都在你的掌握之中，使你有一种‘会当凌绝顶，一览众山小’的意境，从这个意义上说‘泰勒定理是一元微分学的顶峰’并不过分”. 用上面这段话进一步强调泰勒公式的重要性. **例 1** 验证下列函数的麦克劳林公式: (1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$； (2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$； (3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$； (4) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$； (5) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$ $+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$； 特别地	

	(6) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$； (7) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$. **解：**（1） 由于 $f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$ 所以 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$，代入公式，得 $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$ （2） 因为 $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$， $n=1,2,\cdots$ 所以 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1, f^{(4)}(0)=0,\cdots$ 于是 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$. 当 $m=1,2,3$ 时， 有近似公式 $$\sin x\approx x,\quad \sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3,\quad \sin x\approx x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5.$$ 同理，可求出公式（3）. 公式（4）（5）请同学们自主探究. **【德育元素】** “纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行”，仅在课堂上听的题目还不够，还要自己亲自做题体验，公式（4）（5）由同学们自主探究. 从上面几个例子可以看出，直接展开法需要求函数的各阶导数，这个过程相对复杂，我们在实际展开中，常常利用例 1 中的公式间接展开，称为**间接展开法**. 比如 **例 2** 写出 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的麦克劳林公式，并求 $f^{(2021)}(0)$ 与 $f^{(2022)}(0)$. **解** 用 $\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ 替换例 1 中的公式(1)中的 x，便得:	

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2!}+\cdots+\frac{(-\frac{x^2}{2})^n}{n!}+o((-\frac{x^2}{2})^n)$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}+o(x^{2n})$$

由此可得 $f^{(2022)}(0)=\frac{(-1)^{1011}2022!}{2^{1011}1011!}=-\frac{2022!}{2^{1011}1011!}$， $f^{(2021)}(0)=0$.

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解 由 $e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+o(x^4)$， $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$，

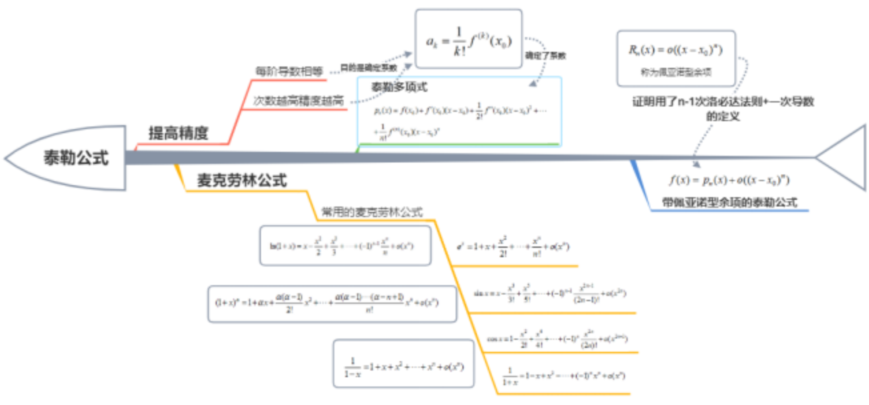
所以

$$e^{x^2}+2\cos x-3=(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x^4+o(x^4),$$

故 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}$.

用泰勒公式求极限的题目，要么是乘除，要么是加减，有两种展开规则：**“分式上下同阶”**原则和**“加减幂次最低”**原则。**“分式上下同阶”**原则：如果分母（或分子）是 x^k，则应该把分子（或分母）展开到 x^k，适用于 $\frac{A}{B}$ 型。**“加减幂次最低”**原则：将 A,B 分别展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂为止，适用于 $A-B$ 型。

引申：定理 1 给出了用泰勒多项式来代替函数 $y=f(x)$ 时余项大小的一种估计，但这种估计只告诉我们当 $x\to x_0$ 时，误差是较 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小量，这是一种“定性”的说法，并未从“量”上加以描述；换言之，当点给定时，相应的误差到底有多大？这从带佩亚诺余项的泰勒公式上看不出来． 为此，我们有有必要余项作深入的讨论，以便得到一个易于计算或估计误差的形式．

	【德育元素】 在俄国革命期间，数学物理学家塔姆外出找食物，在靠近敖德萨的乡间被反共产主义的保安人员逮捕. 保安人员怀疑他是反乌克兰的共产主义者，于是把他带回总部. 头目问：你是做什么的？ 塔姆：我是一位数学家. 头目心存怀疑，拿着枪，手指扣着扳机，对准他. 手榴弹也在他的面前晃动. 头目说：现在我给你一个函数作泰勒展开，到第 n 项之后，你就把误差项算出来. 如果你算对了，就放你一条生路，否则就立刻枪毙. 于是塔姆手指发抖，战战兢兢地慢慢计算，当他完成时，头目看过答案，挥手叫他赶快离开，就这样塔姆逃过了一劫. 塔姆在 1958 年获得诺贝尔物理奖，但是他从未再遇到这位非凡的头目. 但是他在讲授微积分课程时，每次讲到泰勒定理时就会顺便说起这件事. 通过历史故事讲解，提高学生的兴趣，激起学生的好奇心，然后逐步将学生带进本节内容理论知识上. 并且以“数学可以救命”这种幽默诙谐的方式引导学生数学学习的重要性. 那么救了数学家塔姆一命的误差项是什么呢？这就是我们下节课要学习的带拉格朗日型余项的泰勒公式.	
课堂小结		3 分钟
教学总结	泰勒公式在近似计算上有着独特的优势，利用它可以将非线性问题化为线性问题，并能满足很高的精确要求，其在微分	

	学相关计算与证明中都有广泛的应用．利用常见函数的泰勒公式，可以大大简化函数形式，对于一些用洛必达法则求解计算量很大的极限问题，泰勒公式也能很好的解决．本节课对学生来说有些难度，带佩亚诺型余项的泰勒公式的证明中，由于要连续$n-1$次应用洛必达法则，学生对第n次不能用洛必达法则不是很理解，这是第一个难点．另外，学生对泰勒多项式的形式需要时间熟悉，利用公式求极限时，对展开的阶数把握不准。通过布置适量作业进一步熟悉公式，体会求极限的过程中的两种展开规则：“分式上下同阶”原则和“加减幂次最低”原则．	

《二重积分的概念》课程思政教学设计

数学与统计科学学院　包贵

数学分析课程负责人：王秀红

课程思政建设团队：宋美 崔少燕 张丽娟 史英英 高荣 邵晶晶

教学内容	二重积分	**所属课程**	数学分析 3
授课对象	数学与应用数学本科生	**授课时长**	50 分钟
教学背景	“二重积分的概念”作为多元微积分理论中重要的内容之一，一方面它承接了定积分与曲线积分中的微元法思想，另一方面也为后面多元微积分的学习做铺垫，它在微积分理论体系中的地位是承上启下的，是学好多元微积分的关键因素；不仅如此，它有着广泛的应用，可以用来计算曲面的面积，平面薄片重心，平面薄片转动惯量，平面薄片对质点的引力等。此外二重积分在实际生活，比如无线电中也被广泛应用。 本节课讲授二重积分的概念，并用介绍二重积分的性质。前期知识为定积分的概念、性质和计算等相关知识。		
教学目标	知识目标： （1）掌握二重积分的定义、性质； （2）会用二重积分的几何意义。 能力目标： （1）能够理解二重积分及微元法的思想。 （2）培养学生利用二重积分的几何意义解决实际问题的初步能力。 素质目标： （1）培养学生乐于观察、善于分析、勤于动手的习惯； （2）培养学生的归纳总结能力。 德育目标： （1）通过介绍本节出现的数学家阿基米德的生平经历，对数学做出的贡献，鼓励学生励志成才，努力上进。 （2）通过微元法的重要性，学习数学家对待科学的严谨态度，鼓励学生励志成才，努力上进，引导学生学习科学家的精益求精的严谨的科		

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">学态度！
（3）通过解决问题，让学生养成科学严谨的求学态度，并使之感受到数学的魅力与价值。
（4）通过历史人物事迹，激发学生的爱国主义精神。</td></tr>
<tr><td>重难点分析</td><td colspan="2">重点：二重积分的定义、性质、几何意义；
难点：二重积分的可积条件。</td></tr>
<tr><td>教学手段和教学方法</td><td colspan="2">授课教师以黑板教授为主，多媒体展示为辅。
直观演示法，问题驱动法，启发式讲授法，教师的讲解与学生的探究相结合，辅助学生的练习，同时实时插入数学史，融入思政元素，充分调动学生主动性和思考问题的积极性。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">思政理念</td><td>思政素材</td><td>解读方向</td></tr>
<tr><td>1. 二重积分的引例</td><td>结合生活实际让学生感知教学内容的
价值，让学习具有指向性，不仅能激发学生的学习兴趣，还能在挖掘生活数学元素的过程中让学生感受到数学与生活无处不在的联系，培养学生良好的数学思维。
通过介绍《三国志》及相关历史人物，培养学生民族自豪感。
使学生进一步了解历史，养成科学严谨的求学态度，激励学生奋发进取。</td></tr>
<tr><td>2. 二重积分的定义</td><td>微元法是指在处理问题时，从对事物的极小部分(微元)分析入手，达到解决事物整体目的的方法。它在解决物理学问题时很常用，思想就是“化整为零”，先分析“微元”，再通过“微元”分析整体。
培养学生乐于观察、善于分析的习惯，培养学生的归纳总结能力和分析解决实际问题的能力。
培养学生的逻辑思维能力。
通过微元法的起源，介绍阿基米德的生平经历，对数学做出的贡献，鼓励学生励志成才，努力上进，引导</td></tr>
</table>

		学生学习科学家的精益求精的严谨的科学态度！
	3. 二重积分的性质	(1) 培养学生转化问题的能力。 二重积分和定积分以及曲线积分的定义、性质十分类似，既有区别又紧密联系。唯物辩证法主张用联系的观点看问题，反对形而上学孤立的观点。因此，鼓励学生努力刻苦学习，进而提升自己。 （2）积分中值定理揭示了一种将积分化为函数值，或者是将复杂函数的积分化为简单函数的积分的方法，是数学分析的基本定理和重要手段，在求极限、判定某些性质点、估计积分值等方面应用广泛。通过定积分和二重积分中值定理的对比，激发学生的求知欲和学习兴趣。

教学过程

	内容	时间
一、引入	曹冲称象：取自《三国志》：冲少聪察，生五六岁，智意所及，有若成人之智。时孙权曾致巨象，太祖欲知其斤重，访之群下，咸莫能出其理。冲曰："置象大船之上，而刻其水痕所至，称物以载之，则校可知矣。"太祖大悦，即施行焉。  所以，如果想知道不规则图形的体积，可以先"化整为零"，然后"积分为整"。 **【德育元素】** （1）以实际例子引入课题，培养学生把实际问题抽象成数学问题的能力。激发学生的求知欲，提升学习兴趣。也可以让学生明白，遇到复杂的问题，要学会变通，灵活处理，可	5 分钟

	以分解成许多小问题，然后再去解决。 （2）《三国志》，二十四史之一，是由西晋史学家陈寿所著，记载中国三国时期的曹魏、蜀汉、东吴纪传体断代史，是二十四史中评价最高的“前四史”之一。《三国志》取材精审，作者对史实经过认真的考订、慎重的选择，对于不可靠的资料进行了严格的审核，不妄加评论和编写。使学生进一步了解历史，养成科学严谨的求学态度，激励学生奋发进取。	
二、二重积分的定义	**一、平面图形的面积** 为了研究定义在平面图形(即平面点集)上函数的积分，我们首先讨论平面有界图形的面积问题。 所谓一个平面图形 P 是有界的，是指构成这个平面图形的点集是平面上的有界点集，即存在一矩形 R，使得 $P \subset R$。 设 P 是一平面有界图形，用某一平行于坐标轴的一组直线网 T 分割这个图形。这时直线网 T 的网眼---小闭矩形 Δ_i 可分为三类：(i)上的点都 Δ_i 是 P 的内点；(ii) Δ_i 上的点都是 P 的外点，即 $\Delta_i \cap P = \varnothing$；(iii) Δ_i 上含有 P 的边界点。 我们将所有属于直线网 T 的第(i)类小矩形(图中阴影部分)的面积加起来，记这个和数为 $s_P(T)$，则有 $s_P(T) \le \Delta_R$ (这里 Δ_R 表示包含 P 的那个矩形 R 的面积)；将所有第(i)类与第(iii)类小矩形(图中粗线所围部分)的面积加起来，记这个和数为 $S_P(T)$，则有 $s_P(T) \le S_P(T)$。 由确界存在定理可以推得，对于平面上的所有直线网，数集 $\{s_P(T)\}$ 有上确界，数集 $\{S_P(T)\}$ 有下确界，记 $$\underline{I}_P = \sup_T \{s_P(T)\}, \quad \overline{I}_P = \inf_T \{S_P(T)\}。$$	30 分钟

	显然有 $$0 \le \underline{I}_P \le \overline{I}_P \qquad (1)$$ 通常称$\underline{I}_P$为P的内面积，$\overline{I}_P$为P的外面积。 定义 1：若平面图形P的内面积$\underline{I}_P$等与它的外面积$\overline{I}_P$，则称P为可求面积，并称其共同值$I_P = \underline{I}_P = \overline{I}_P$为$P$的面积。 定理 21.1 平面有界图形$P$可求面积的充要条件是：对任给的$\varepsilon > 0$，总存在直线网$T$，使得$S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon$。 由不等式(1)及定理 21.1 立即可得： 推论：平面有界图形P的面积为零的充要条件是它的外面积$\overline{I}_P = 0$，即对任给的ε>0，存在直线网T，使得$S_P(T) < \varepsilon$，或对任给的ε>0，平面图形 P能被有限个其面积总和小于ε的小矩形所覆盖。 定理 21.2：平面有界图形P可求面积的充要条件是：P的边界K的面积为零。 证：由定理 21.1，P可求面积的充要条件是：对任给的ε>0，存在某直线网T，使得$S_P(T) - s_P(T) < \varepsilon$。由于 $S_K(T) = S_P(T) - s_P(T)$， 所以也有$S_K(T) < \varepsilon$。由上述推论，P的边界K的面积为零。 定理 21.3：若曲线K为定义在$[a,b]$上的连续函数$f(x)$的图像，则曲线K的面积零。 证：由于$f(x)$在闭区间$[a,b]$上一致连续。因而对任给的ε>0，总存在δ>0，当把区间$[a,b]$分成n个小区间	

$[x_{i-1},x_i]$（$i=1,2,\cdots,n,x_0=a,x_n=b$）并且满足

$$\max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \mid i=1,2,\cdots,n\} < \delta$$

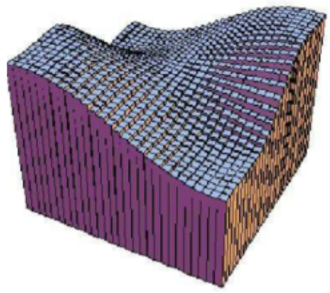
时，可使 $f(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅都成立 $\omega_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$。现把曲线 K 按自变量 $x=x_0,x_1,\cdots,x_n$ 分成 n 个小段，这时每个小段都能被以 Δx_i 为宽，ω_i 为高的小矩形所覆盖。由于这 n 个小矩形面积总和为

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon,$$

所以由定理 21。1 的推论即得曲线 K 的面积为零。

我们还可以证明：由参量方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$（$\alpha \le t \le \beta$）所表示的平面光滑曲线，（即 φ，ψ，在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续的导函数）或按段光滑曲线，其面积一定为零。

二、二重积分的定义



1 .曲顶柱体的体积

曲顶柱体：以连续曲面 $z=f(x,y)\ge 0$ 为顶，xoy 面上可求面积的有界闭区域 D 为底的柱体。

(1)分割

先用一组平行于坐标轴的直线网 T 把区域 D 分割成个 n 小区域 $\sigma_i(i=1,2,...,n)$。以 $\Delta\sigma_i$ 表示小区域 $\sigma_i(i=1,2,...,n)$ 的面积，T 将原曲顶柱体分割成以 $\sigma_i(i=1,2,...,n)$ 为底的 n 个小曲顶柱体，其体积记为 ΔV_i。

(2)近似求和

曲顶柱体的体积

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

$$(\xi_i,\eta_i)\in\sigma_i,\quad i=1,2,\ldots,n$$

(3)取极限

$$V=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i-1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中，$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}d(\sigma_i)$ 称为分割T的细度。

2.密度不均匀的平面物体的质量M

设有质量是连续分布在一个平面区域D上的物体，它的密度是连续函数$\rho=\rho(x,y)$。同理，分割区域D、近似求和、取极

限，则物体的质量$M=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i-1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$。

3. 二重积分的定义

设二元函数$f(x,y)$在可求面积的有界闭区域D上有定义，用任意的曲线把区域D分割成n个小区域$\sigma_i(i=1,2,\ldots,n)$，以$\Delta\sigma_i$表示小区域$\sigma_i(i=1,2,\ldots,n)$的面积。这些小区域$\sigma_i(i=1,2,\ldots,n)$构成区域D的分割T，$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}d(\sigma_i)$ 称为分割T的**细度**。

定义 设二元函数$f(x,y)$是定义在可求面积的有界闭区域D上的函数。J是一个确定的数，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall T,$当

$\|T\|<\delta$ 时，有

$$\left|\sum f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i - J\right| < \varepsilon,$$

则称 $f(x,y)$ 在 D 上**可积**, 数 J 称为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**，记作

$$J=\iint_D f(x,y)d\sigma,$$

其中 $\sum f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 称为函数 $f(x,y)$ 在 D 上属于分割 T 的一个**积分和**， $f(x,y)$ 称为二重积分的**被积函数**，x,y 称为**积分变量**， D 称为**积分区域**。

注: 通常选用一组平行于坐标轴的直线网来分割 D ,则每一小网眼区域 σ 的面积 $\Delta\sigma=\Delta x\Delta y$ 。此时通常把 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 记作

$$\iint_D f(x,y)dxdy。$$

4. 几何意义

(1) 当 $f(x,y)\geq 0$ 时， $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 表示曲顶柱体的体积。

显然 $V=\iint_D f(x,y)d\sigma$ ， $M=\iint_D \rho(x,y)d\sigma$ 。

(2) 当 $f(x,y)=1$ 时， $S_D=\iint_D d\sigma, S_D$ 表示积分区域 D 的面积。

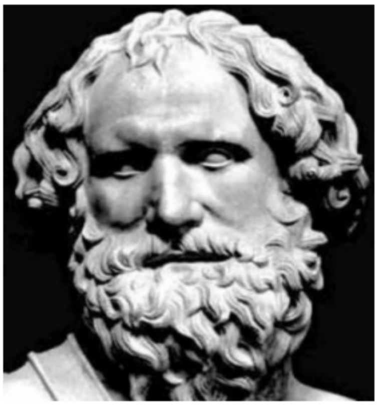
注： 曹冲称象的方法，这是一种深刻的思维方法，先分割，再累计求和，达到了解整体。是对某事件做整体的观察后，取出该事件的某一微小单元进行分析，通过对元素的细节的物理分析和描述，最终解决整体的方法，数学上称为微元法。

微元法思想是积分学的重要思想，但微元法思想的起源则是依赖于微分学起源和发展。微元法思想萌芽、发生与发展经历了漫长的历史过程。

微元法思想的萌芽最早可追溯到公元前 300 年左右，古希腊伟大的数学家、力学之父阿基米德在解决抛物线围成的面积、球形面积和双曲旋转体的体积等问题时就已经有了关于微分然后再积分的想法。

阿基米德之后，微积分思想没有实质性的突破和发展，直到 17 世纪上半叶近代微积分开始酝酿。微元法思想的发展始于社会和自然科学发展的驱动，如矿山开发、行星运动规律和航海等需要力学和一系列有关数学的问题，迫切的需要运用数学工具去解决这些问题。

注：阿基米德（公元前 287 年—公元前 212 年），伟大的古希腊哲学家、百科式科学家、数学家、物理学家、力学家，静态力学和流体静力学的奠基人，并且享有“力学之父”的美称，阿基米德和高斯、牛顿并列为世界三大数学家。



【德育元素】

（1)通过介绍阿基米德的生平经历，对数学做出的贡献，鼓励学生励志成才，努力上进。

（2）通过介绍《三国志》及相关历史人物，如曹操、司马懿、诸葛亮等，培养学生民族自豪感。

（3）培养学生归纳问题和分析解决实际问题的能力。

<table>
<tr>
<td>三、可积条件与性质</td>
<td>

三 、可积的条件

1. 必要条件

若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 可积，则 $f(x,y)$ 在 D 上有界。

2. 可积的充要条件

函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积的充要条件是

$\forall \varepsilon > 0, \exists D$ 的某个分割 T，使得 $S(T)-s(T)<\varepsilon$ 。

3. 可积的充分条件（可积函数类）

(1) 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 连续，则函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积。

(2) 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有界，其间断点只分布在有限条光滑曲线上，则函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积。

（证明与定积分类似，略）

四、二重积分的基本性质

与定积分类似，二重积分也有如下一些性质。

1. 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，k 为常数，则 $kf(x,y)$ 在 D 上可积，且

$$\iint_D kf(x,y)d\sigma = k\iint_D f(x,y)d\sigma.$$

2.若 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 在 D 上都可积，则 $f(x,y)\pm g(x,y)$ 在 D 也上可积，且

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma = \iint_D f(x,y)d\sigma \pm \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

3. 若 $f(x,y)$ 在 D_1 和 D_2 上都可积，且 D_1 与 D_2 无公共内点，

</td>
<td>10 分钟</td>
</tr>
</table>

	则 $f(x,y)$ 在 $D_1\cup D_2$ 也上可积，且 $$\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$ 4. 若 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 在 D 上都可积，且 $$f(x,y)\le g(x,y),\quad (x,y)\in D,$$ 则 $$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma\le\iint\limits_{D} g(x,y)d\sigma.$$ 5. 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，则 $\lvert f(x,y)\rvert$ 在 D 也上可积，且 $$\left\lvert\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma\right\rvert\le\iint\limits_{D} \lvert f(x,y)\rvert d\sigma.$$ 6. 若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，且 $$m\le f(x,y)\le M,\quad (x,y)\in D,$$ 则 $$mS_D\le\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma\le MS_D,$$ 这里 S_D 是积分区域 D 的面积。 7. (中值定理) 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 连续，则存在 $(\xi,\eta)\in D$,使得 $$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)S_D,$$ 这里 S_D 是积分区域 D 的面积。 中值定理的几何意义：以 D 为 $z=f(x,y)(f(x,y)\ge 0)$ 为曲顶的曲顶柱体体积等于一个同底的平顶柱体的体积，这个平顶柱体的高等于 $f(x,y)$ 在区域 D 中某点 (ξ,η) 的函数值 $f(\xi,\eta)$。 **【德育元素】**	

	(1)培养学生转化问题的能力。二重积分和定积分以及曲线积分的定义、性质十分类似，既有区别又紧密联系。唯物辩证法认为世界上一切事物都不是孤立存在的，而是和周围其他事物相互联系着的，整个世界就是一个普遍联系着的有机整体，联系具有普遍性、客观性、多样性、条件性、可变性。唯物辩证法主张用联系的观点看问题，反对形而上学孤立的观点。因此，鼓励学生努力刻苦学习，进而提升自己。 （2）积分中值定理揭示了一种将积分化为函数值，或者是将复杂函数的积分化为简单函数的积分的方法，是数学分析的基本定理和重要手段，在求极限、判定某些性质点、估计积分值等方面应用广泛。通过定积分和二重积分中值定理的对比，激发学生的求知欲和学习兴趣。	
四、课堂练习与小结	思考与练习： 1. 将二重积分定义与定积分定义进行比较，找出它们的相同之处与不同之处？ 2.试用二重积分表示极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}e^{\frac{i^2+j^2}{n^2}}$. 小结：注意定义中的微元法，此方法在后面的几类积分定义中都有应用。	5 分钟
教学总结	本节课围绕提出问题、分析解决问题，以问题为导向，以分析为重点，引导学生递进学习。通过本节课的学习，学生了解了二重积分的概念、性质。在教学过程中，注意课程内容和思政元素有机渗透，引导学生树立正确的人生观和价值观，培养辩证唯物主义的思想，培养严谨的科学态度。使学生主动参与到教学活动中，在活动中获得学习的成就感。	